Potentialtheoretische Untersuchungen über Magnetfelder in Transformatoren und über ihre Streuinduktivität speziell bei Zylinderwicklung

Von der Technischen Hochschule zu Breslau zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs genehmigte

Dissertation

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. GERHARD STEIN

aus Breslau

Referent
Prof. Dr. F. NOETHER

Korreferent
Privatdozent Dr. H. HEMMETER

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Juli 1927

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus:
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik
Band 9, 1929, Seite 23 bis 49.

Potentialtheoretische Untersuchungen über Magnetfelder in Transformatoren und über ihre Streuinduktivität speziell bei Zylinderwicklung.[1]

Von **GERHARD STEIN** in Berlin-Oberschöneweide.

Den ursprünglichen Anlaß zu der Problemstellung der vorliegenden Arbeit bot eine Untersuchung von St. Bergmann[2]), die das reine Eisenfeld in einem Rechteckrahmen mittels konformer Abbildung behandelt, eine Aufgabe, die vorwiegend mathematischen Charakter hat. Da aber in vielen Fällen [z. B. für die in der Elektrotechnik als Streuung[3]) bekannten Erscheinung] das Luftfeld mit in die Rechnung eingeht, seine Kenntnis mitunter sogar allein ausreicht, so machte es sich die vorliegende Arbeit schließlich zur Aufgabe, auch über den Verlauf solcher Luftfelder — und zwar ebener Felder — näheren Aufschluß zu gewinnen, insbesondere in solchen Fällen, in denen ein geschlossener Eisenrahmen vorliegt wie bei den üblichen Transformatoren. Der erste Schritt war der, ein vereinfachtes Modell dieses Rahmens kreisringförmig und die Strombelegungen punktartig anzunehmen, was dann in Abschnitt **3** der Arbeit mit kreisbogenförmigen Strombelegungen wirklich ausgeführt wird (vergl. auch die Feldbilder der Abb. 19 und 20 S. 26). Es war vorauszusehen, daß an diesem vereinfachten Modell, das aber der Rechnung durch Reihenentwicklungen nach Kreisfunktionen durchaus zugänglich war, die hauptsächlichsten Gesichtspunkte sich schon übersehen lassen würden.

In der Tat ließ sich hiernach bei endlicher Permeabilität μ eine exakte Felduntersuchung, die sich auf die aus Fenster-, Eisen- und Außenraum bestehende Gesamtebene bezieht, durchführen, und es ergab sich das für die weitere Behandlung wesentliche Resultat, daß die Luftfelder in dem wirklichen Falle sehr großer μ in zwei Gruppen zerfallen.

1. *Solche, die auf dem Eisenrande senkrecht stehen (ihre Strombelegungssumme in jedem Luftgebiete muß gleich Null sein)*;
2. *solche, die am Eisenrande eine Tangentialkomponente der Feldstärke besitzen, aber mit einem durch die Verteilung der Gesamtbelegung auf die einzelnen Luftgebiete festgelegten Tangentialverlauf.*

Insbesondere der letzte Gesichtspunkt ist in der Literatur wohl noch unerwähnt. Erst durch diese Trennung nämlich wird man berechtigt, die Aufgabe näherungsweise als eine Randwertaufgabe für den Fenster-, bzw. für den Außenraum aufzufassen.

Nach Aufstellung dieser allgemeinen Gesichtspunkte liegt deren Uebertragung auf eine der wirklichen Transformatorform mehr entsprechende rechteckige Rahmenform mit den rechteckigen Strombelegungen der Zylinderwicklung nahe (vergl. z. B. Abb. 16, S. 21). Da die dabei angewandte funktionentheoretische Methode von Einzelpolen ausgeht, so könnte als Belegungsform hier ebensogut eine Scheibenwicklung gewählt werden. Die Zylinderform war aber näherliegend, weil bei ihr die Rahmenform stärkeren Einfluß ausübt, und weil die Scheibenwicklung schon von Rogowski[4]) in anderer Weise behandelt ist.

Während der zweite Teil der obigen Gruppeneinteilung hier nur prinzipiell diskutiert wird (I **3**), ist der erste Fall für das Innengebiet des Rechteckrahmens wirklich durchgeführt (I **5**), wie oben erwähnt als Randwertaufgabe, die übrigens durch elliptische Funktionen vollständig lösbar ist. Als Spezialfall und zur Abschätzung des bei genauer Berücksichtigung der rechteckigen Rahmenform schwer zu erfassenden Außenfeldes, wird auch der einfachere Fall, daß das Feldgebiet von einer unendlichen Wand begrenzt ist, durchgerechnet (I **4**).

Als Anwendung dieser allgemeinen Feldberechnungen ergibt sich die Bestimmung derjenigen Teile der Transformatorinduktivität, die ohne genauere Kenntnis des Feldes im Eisen berechenbar sind; das ist in der Hauptsache die Streuinduktivität, da der Eisen-

---

[1]) Von der Falkultät für Allgemeine Wissenschaften der Technischen Hochschule Breslau, als Dissertation angenommen. Referent: Prof. Dr. Noether, Korreferent: Privatdozent Dr.-Ing. Hemmeter †.

[2]) Bergmann, »Ueber die Berechnung des magnetischen Feldes in Einphasentransformatoren«, diese Zeitschr., Bd. 5 (1925).

[3]) Die genaue Fassung dieses Begriffs findet man in II **1**, S. 18 f.

[4]) Rogowski, Ueber das Streufeld und den Streuinduktionskoeffizienten eines Transformators mit Scheibenwicklung und geteilten Endspulen. Dissertation, Danzig 1908.

fluß immer als ein beiden Wicklungen gemeinsamer erscheint. Zum Anschluß an die elektrotechnische Literatur geht hier eine kurze Diskussion des Streubegriffes voran (II **1** und **2**), die aber nur bezweckt, die aus den behandelten Feldern berechenbaren Größen mit den elektrischen Transformatorgleichungen in Verbindung zu bringen. Die wirkliche Durchführung der Streuungsberechnungen benötigt dann noch eine Reihe von Integrationen (II **3** und **4**). Endlich wird ein Teil der berechneten Felder aus den analytischen Formeln auch mittels graphisch numerischer Methoden zeichnerisch hergestellt (III).

Während in dieser Arbeit nur ebene Feldberechnungen durchgeführt werden, müßte die genauere Erfassung der Transformatorfelder auf räumlichem Wege erfolgen. Daher rührt die Abweichung von rd. 10 vH zwischen der beispielsweise durchgeführten Berechnung und Messung einer Streuinduktivität (III). Immerhin ergibt die Rechnung als Resultat eine Korrektur der bekannten Kappschen Streuungsformel, die qualitativ bezüglich der Abhängigkeit von den Transformatorabmessungen anwendbar sein dürfte.

I. Ebene Feldberechnungen.

1. Vorbereitende Betrachtungen. Ein Schnitt senkrecht zur Fensterachse des Zwei- bzw. Dreiphasentransformators ergibt ganz allgemein Längsschnittflächen durch den Eisenrahmen von der Form der Abb. 1 und 2. Sie zerfallen in die drei charakteristischen Bereiche, den Fenster-, Eisen- und Außenraum bzw. in das Innen-, Zwischen- und Außengebiet[1]). Der Schnitt durch die Wicklungsdrähte stellt hierbei die sogenannten Strom- oder Wirbelbelegungen des zugehörigen Magnetfeldes dar, während der einzelne Draht einem isolierten, d. h. einem auf einen Punkt zusammengezogenen Wirbel entsprechen soll. Außerdem nehmen wir den Transformator in Richtung der Fensterachse unendlich tief an, ersetzen ihn also durch einen unendlich langen Schacht. Somit ist das Transformatorenproblem auf eine ebene Aufgabe zurückgeführt.

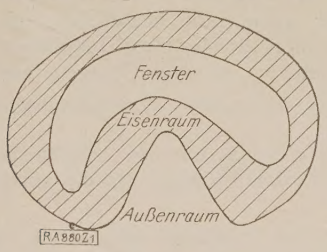

Abb. 1.

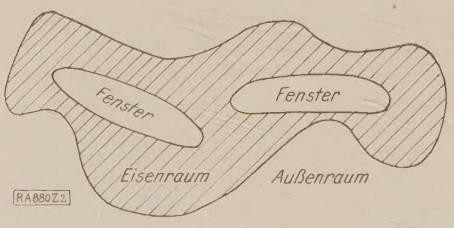

Abb. 2.

Bei der analytischen Behandlung des Magnetfeldes bleibt die Orientierung eines Koordinatenkreuzes x, y in seiner Ebene zunächst offen. $\mathfrak{j}$ sei die Strombelegung pro Flächeneinheit. Der magnetische Feldvektor $\mathfrak{H}$ (in Gauß) und ebenso der Vektor der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ (in Gauß) liegen in der xy-Ebene. Es besitze ferner die Permeabilität des Eisens den konstanten Wert μ, die der Luft den Wert 1. $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ hängen alsdann im Luftraum durch die Gleichung $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$, im Eisenraum durch die Beziehung $\mu\,\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ von einander ab. Außerdem ist bekanntlich überall $\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$. Auf Grund der letzten Gleichung existiert eine Flußfunktion $\psi(x, y)$, so daß:

$$\mathfrak{B}_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad \mathfrak{B}_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,a).$$

ist. Wegen des Amperschen Gesetzes $\operatorname{rot}\mathfrak{H} = -0{,}4\,\pi\,\mathfrak{j}$ kann man daneben außerhalb der Belegungsgebiete:

$$\mathfrak{H}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \mathfrak{H}_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,b)$$

schreiben. Die Hilfsfunktion $\varphi = \int \mathfrak{H}\, d\,\mathfrak{s}$, das magnetische Potential, ist so außerhalb der Belegungsgebiete definiert und liefert dort mit ψ zusammen die komplexe Funktion:

$$\psi(x, y) - i\,\varphi(x, y) = \mathfrak{F}(z), \qquad [z = x + i\,y] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Woraus sich eine komplexe Funktion:

$$\mathfrak{G}(z) = -i\,\frac{\partial\,\mathfrak{F}(z)}{\partial z} = \mathfrak{H}_x - i\,\mathfrak{H}_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

[1]) Der Uebersichtlichkeit halber wurden hier diese Bezeichnungen eingeführt und im Folgenden verwendet.

ableiten läßt. Es gilt dann für $\mathfrak{F}(z)$ wie auch für $\psi(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ die Laplacesche Differentialgleichung: $\Delta \mathfrak{F} = 0$ bzw. $\Delta \psi = 0$ und $\Delta \varphi = 0$.

Innerhalb der Belegungsgebiete hingegen, wo stets rot $\mathfrak{H} = -0{,}4\,\pi\,\mathfrak{j}$ ist, hat die Aufstellung einer Potentialfunktion $\varphi(x, y)$, also auch die einer komplexen Funktion $\mathfrak{F}(z)$ keinen Sinn. Es bleibt nur der Realteil $\psi(x, y)$ eindeutig definiert und genügt der Gleichung: $\Delta \psi = -0{,}4\,\pi\,\mathfrak{j}$.

Deshalb beginnen wir überall mit der Berechnung elementarer Magnetfelder, in welchen nur isolierte Wirbel vorgegeben sind. Sie erscheinen in der zugehörenden komplexen Funktion $\mathfrak{f}(z)$ als logarithmische Pole. Der Uebergang zu den Feldern verteilter Wirbelflächen geschieht durch Integration über jene Elementarwirbel. Sie führt zunächst auf die Felder von Wirbellinien, deren komplexe Funktion speziell mit $\mathfrak{d}\,\mathfrak{F}(z)$ bezeichnet werde. $\mathfrak{d}\,\mathfrak{F}(z)$ ist überall im Magnetfelde bestimmt, wenn wir einen Durchgang durch die zugehörigen Wirbellinien ausschließen.

Für die Flußfunktion $\psi(x, y)$ gelten im Innen-, Außen- und Zwischengebiet getrennte analytische Ausdrücke ψ_1, ψ_2, ψ_3, welche insgesamt durch folgende Uebergangsbedingungen zusammenhängen: An der Eisenoberfläche geht die Tangentialkomponente der Feldstärke $\mathfrak{H}_t$ und die Normalkomponente der Induktion $\mathfrak{B}_n$ stetig über, d. h. es ist:

$$\mathfrak{H}_t^{\text{Eisen}} = \mathfrak{H}_t^{\text{Luft}}, \qquad \mathfrak{B}_n^{\text{Eisen}} = \mathfrak{B}_n^{\text{Luft}}, \qquad \text{also} \qquad \mathfrak{H}_n^{\text{Eisen}} = \frac{1}{\mu}\,\mathfrak{H}_n^{\text{Luft}} \quad . \quad . \quad (4).$$

Soll eine Flußfunktion in einem abgeschlossenen Gebiete bestimmte Randbedingungen erfüllen, so läßt sich das unter Umständen durch geeignete Fortsetzung erreichen. Eine solche kann einer Wirbelverteilung außerhalb des gerade in Frage kommenden Raumes entsprechen.

Bei uns stelle die Grundfunktion ψ_0 das Feld ohne Eisenkörper dar. Wir nennen es das Grundfeld. Unter Berücksichtigung der vorgegebenen Randbedingungen tritt dann für das Fenster zu ψ_0 eine Zusatzfunktion $\overline{\psi_1}$, deren Ansatz eine Polverteilung außerhalb des Innengebietes zugrunde gelegt werden muß; d. h.

$$\psi_1 = \psi_0 + \overline{\psi_1}, \qquad \psi_2 = \psi_0 + \overline{\psi_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

wobei ψ_2 eine nicht im Außengebiete liegende Polverteilung bedeutet. Die Flußfunktion ψ_3 des Eisengebietes schließlich besitzt eine Polverteilung im Innen- und Außengebiet.

Für die der Flußfunktion ψ zugeordnete komplexe Funktion gilt eine entsprechende Zerlegung; d. h. wir definieren im elementaren Magnetfelde die Grundfunktion $f_0(z)$ und bilden für das Innen-, Außen- und Zwischengebiet die Funktionen:

$$f_1(z) = f_0(z) + \overline{f_1}(z), \qquad f_2(z) = f_0(z) + \overline{f_2}(z), \qquad f_3(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

2. Feld beim Kreisring. Vor der Behandlung der durch die Abb. 1 und 2 gekennzeichneten allmeinen Modellformen soll eine Reihe von allgemeinen Eigenschaften an dem einer mathematischen Behandlung besonders zugänglichen konzentrischen Kreisringe (Abb. 3) entwickelt und veranschaulicht werden. Hierbei gehen wir von einem elementaren Magnetfeld aus und beschränken uns zunächst auf eine einzige vom Strome J durchflossene Windung, welche durch einen positiven Pol im Innen- und einen negativen Pol im Außengebiet vertreten wird, die beide auf der x-Achse angenommen sind. ϱ_1 und ϱ_2 seien ihre Abstände vom Punkte M; R_1 und R_2 bezeichnen die Radien des Kreisringes. Seine Ebene sei durch $z = x + i\,y = r\,e^{i\vartheta}$ gekennzeichnet. Dann lautet die Grundfunktion:

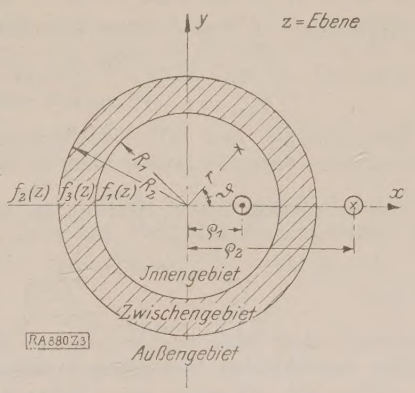

Abb. 3.

$$\mathfrak{f}_0(z) = 0{,}2\,J\,[\log(z - \varrho_1) - \log(z - \varrho_2)].$$

Wir entwickeln diesen Ausdruck in bekannter Weise im Gebiete $\varrho_1 < |z| < \varrho_2$ in eine Laurentsche Reihe, welche dort konvergiert, und setzen die oben eingeführten Funktionen $\overline{f_1}(z)$, $\overline{f_2}(z)$ und $f_3(z)$ in entsprechender Form an, schreiben also:

$$f_0(z) = 0{,}2\,J\left[\log z - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{\varrho_1}{z}\right)^m + \log(-\varrho_2) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{z}{\varrho_2}\right)^m\right]$$

$$= a_0 \log z + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot \frac{1}{z^m} + b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cdot z^m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7\,a),$$

$$f_1(z) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cdot z^m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7\,b),$$

$$\overline{f_2}(z) = \beta_0 \log z + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \cdot \frac{1}{z^m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7\,c),$$

$$f_3(z) = \gamma_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \cdot z^m + \delta_0 \log z + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m \cdot \frac{1}{z^m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7\,d).$$

Diese Darstellung kann auch folgendermaßen gedeutet werden:

Die Felder von $f_0(z)$, $f_1(z)$, $\overline{f_2}\,z)$ und $f_3(z)$ lassen sich im Gebiete $\varrho_2 < |z| < \varrho_2$ durch eine Folge von in den Punkten 0 und ∞ gelegenen Ein- und Mehrfachpolen erzeugen. Es enthält nämlich z. B. eine Funktion $a_0 \log z$ je einen einfachen Pol in jenen beiden Punkten, eine Funktion a_1/z einen Dipol im Nullpunkt, eine Funktion $b_1 z$ einen gleichartigen im Punkte ∞, und allgemein bedeutet a_m/z^m einen $2m$-fachen Pol im Nullpunkte, $b_m \cdot z^m$ einen gleichartigen im Punkte ∞.

Außerdem hat jedes Glied in den Reihen (7) die Form:

$$u_m = \text{konst.}\; z^{\pm m} = \text{konst.}\; r^{\pm m}\, e^{\pm i m \vartheta}.$$

Damit hängt es zusammen, daß man die Randbedingungen (4) bereits erfüllen kann, indem man nur je die zu gleichen Index m gehörigen Glieder der vier Reihen geeignet zusammenfaßt. Die Eindeutigkeit dieser Lösung läßt sich mittels bekannter potentialtheoretischer Methoden beweisen [1]).

Deshalb können wir unsere Untersuchungen im allgemeinen auf zwei Elementarfelder beschränken, indem wir einen $2m$ fachen Pol einmal in das Innengebiet, das andere Mal in das Außengebiet legen. Daneben bedarf nur noch das erste Glied $a_0 \log z$ einer gesonderten Betrachtung, da dieses gleichzeitig je einen einfachen Pol in beiden Bereichen enthält.

So wird zunächst das Feld eines $2m$-fachen Poles im Nullpunkte mit der Grundfunktion $u^{(z)}_{0\,m} = \frac{a_m}{z^m}$ nach den Gl. (6) und (7):

im Innengebiet durch: $u^{(z)}_{1\,m} = \alpha_m z^m + \frac{a_m}{z^m}$ $\ldots\ldots\ldots$ (8 a),

im Außengebiet durch: $u^{(z)}_{2\,m} = \frac{\beta_m}{z^m}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots$ (8 b),

im Zwischengebiet durch: $u^{(z)}_{3\,m} = \gamma_m z^m + \frac{\delta_m}{z^m}$ $\ldots\ldots\ldots$ (8 c)

dargestellt. In reeller Form schreiben sich die zugehörigen Flußfunktionen:

$$\psi^{(z)}_{1\,m} = \alpha_m \cdot r^m \cos m\,\vartheta + a_m \cdot r^{-m} \cos m\,\vartheta\,, \qquad \psi^{(z)}_{2\,m} = \beta_m \cdot r^{-m} \cos m\,\vartheta$$

$$\psi^{(z)}_{3\,m} = \gamma_m \cdot r^m \cos m\,\vartheta + \delta_m \cdot r^{-m} \cos m\,\vartheta\,.$$

Sind nun $\mathfrak{H}^{(r)}$ und $\mathfrak{H}^{(\vartheta)}$ die Komponenten der Feldstärke in Richtung des Radius und senkrecht dazu, so lauten hier die Randbedingungen (4) für $r = R_1$ bzw. $r = R_2$:

Stetigkeit von $\mathfrak{H}^{(\vartheta)} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$, Stetigkeit von $\mathfrak{H}^{(r)} = \mu \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}$; d. h. also:

$$\alpha_m R_1^{m-1} + \frac{a_m}{R_1^{m+1}} = \mu\left(\gamma_m R_1^{m-1} + \frac{\delta_m}{R_1^{m+1}}\right), \quad \alpha_m R_1^{m-1} - \frac{a_m}{R_1^{m+1}} = \gamma_m R_1^{m-1} - \frac{\delta_m}{R_1^{m+1}},$$

$$\frac{\beta_m}{R_2^{m+1}} = \mu\left(\gamma_m R_2^{m-1} + \frac{\delta_m}{R_2^{m+1}}\right), \quad -\frac{\beta_m}{R_2^{m+1}} = \gamma_m R_2^{m-1} - \frac{\delta_m}{R_2^{m+1}}.$$

Die vorstehenden vier linearen Gleichungen für α_m, β_m, γ_m, δ_m lösen wir nach diesen Größen auf, schreiben zur Abkürzung:

$$N = 1 + \frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2m}\right]\left[\sqrt{\mu} - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

und erhalten:

[1]) Siehe Riemann-Weber, Frank-Mises, »Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik«. Teil II, S. 352 f.

$$\alpha_m = \frac{a_m}{R_1{}^{2m}} \frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2m}\right]\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)}{N}, \quad \beta_m = \frac{a_m}{N}, \quad \gamma_m = -\frac{a_m}{R_2{}^{2m}} \frac{{}^1/_2\, 1-1/\mu}{N}, \quad \delta_m = a_m \frac{1}{2} \frac{1+1/\mu}{N}.$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die Gl. (8) ein und finden so, für einen $2m$-fachen Pol im Nullpunkte:

$$u^{(z)}_{0\,m} = a_m \cdot \frac{1}{z^m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10\,\text{a}),$$

$$u^{(z)}_{1\,m} = a_m \cdot \frac{1}{z^m} + a_m \left(\frac{z}{R_1{}^2}\right)^m \cdot \frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2m}\right]\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)}{N} \quad \ldots \ldots \quad (10\,\text{b}),$$

$$u^{(z)}_{2\,m} = a_m \cdot \frac{1}{z^m} \cdot \frac{1}{N} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10\,\text{c}),$$

$$u^{(z)}_{3\,m} = a_m \cdot \frac{1}{z^m} \cdot \frac{1}{2} \frac{1+1/\mu}{N} - a_m \cdot \left(\frac{Z}{R_2{}^2}\right)^m \frac{1}{2} \frac{1-1/\mu}{N} \quad \ldots \ldots \quad (10\,\text{d}).$$

Für $m = 0$ gelten diese Gleichungen nicht. Im allgemeinen sagen sie aus:

Es erscheinen sowohl Glieder mit einem Faktor $a_m\, 1/z^m$ als auch solche mit $a_m \left(\frac{Z}{R^2}\right)^m$.

Die erstgenannten Ausdrücke gehen aus dem Grundfeld hervor, bedeuten also einen $2m$-fachen Pol im Nullpunkte. Die zweiten entsprechen einer Spiegelung[1]) dieses Grundfeldes am Kreise mit dem Radius R und enthalten so einen $2m$-fachen Pol im Punkte ∞. So erkennt man, daß das im Fenster erzeugte Grundfeld teils am Innenkreis R_1 gespiegelt wird, teils in das Eisen eindringt, wo am Außenkreise R_2 eine zweite Reflektion stattfindet, und daß nur der nicht reflektierte Teil des Grundfeldes in den Außenraum gelangt. Das Eisen schirmt also einen Teil des Grundfeldes nach außen hin ab.

Für die effektive Wirkung von Reflektion und Abschirmung ist in den entsprechenden Gliedern der Nenner $N = 1 + \frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2m}\right]\left(\sqrt{\mu}-\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)^2$, d. h. aber im wesentlichen die Größe $\left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)\cdot\mu$ überall charakteristisch[2]). Wir sehen aus ihnen, daß bei Vertauschung μ mit $1/\mu$ das Maß des Reflektion sein Vorzeichen ändert. D. h. beim Uebergange von einem Gebiete mit kleinerer Permeabilität nach einem solchen mit größerer, also z. B. von Luft in Eisen, muß mit positivem Vorzeichen gespiegelt werden, im entgegengesetzten Falle mit negativem. Reflektion und Abschirmung verschwinden für jedes μ im Falle $R_1 = R_2$ und bei endlicher Breite des Kreisringes für $\mu = 1$. Es erscheint in allen drei Gebieten nur das Grundfeld $u^{(z)}_{0\,m}$. Der Fall $\mu = 0$ ist physikalisch nicht zu verwirklichen. Dagegen bleibt bei den praktisch vorkommenden Sättigungsgraden im Transformator μ im Eisen immer sehr groß gegen 1, sodaß im Falle $R_1 \neq R_2$ mit dem idealen Grenzfall $\mu \to \infty$ gerechnet werden kann und zwar nach (9), mit um so größerer Genauigkeit, je größer m ist. Der Grenzfall $\mu \to \infty$ ist demnach für uns von ganz bebesonderer Bedeutung. Für ihn besitzt unsere komplexe Funktion nur im Innengebiet endliche Werte und nimmt dort gemäß Gl. (10 b) die Form:

$$u^{(z)}_{1\,m} = \frac{a_m}{z^m} + a_m \cdot \left(\frac{z}{R_1{}^2}\right)^m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

an.

Genau entsprechendes gilt, wenn der Pol im unendlichen liegt unter Vertauschung von Innen- und Außengebiet. Es reduziert sich dann das Feld des Außengebietes für den Grenzfall $\mu \to \infty$ auf die komplexe Funktion:

$$u^2{}_m(z) = b_m z^m + b_m \cdot \left(\frac{R_2{}^2}{z}\right)^m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

In den Gl. (7) erscheinen auch Funktionen $a_0 \log z$; $\delta_0 \log z$, welche noch nicht behandelt wurden. Wendet man auf diese Glieder die Randbedingungen (4) in derselben Weise wie oben an, so folgt für alle drei Gebiete:

$$u_{10}(z) = u_{20}(z) = u_{30}(z) = a_0 \log z \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13).$$

---

[1]) Die Definition der Spiegelung findet man z. B. bei Hurwitz-Courant, Vorlesungen über Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, S. 327.

[2]) Vergl. auch Frank-Mises, Bd. II, S. 335 f.

Für die Felder der beiden $a_0 \log z$ entsprechenden Pole im Nullpunkte und im Punkte ∞ ist also keine Schirmwirkung des Eisens vorhanden. Wir erhalten ein reines Zirkulationsfeld, dessen Feldstärke mithin auf dem Rande des Kreisringes konstant ist, tangential verläuft und welches von dessen Permeabilität μ vollkommen unabhängig bleibt. Es unterscheidet sich demnach auch für den Grenzfall $\mu \to \infty$ nicht vom Grundfelde.

Faßt man die Gl. (11), (12) und (13) für alle m zusammen, setzt überall

$$a_m = -0{,}2\, J \cdot \frac{1}{m}\, \varrho_1{}^m, \qquad b_m = 0{,}2\, J\, \frac{1}{m}\, \frac{1}{\varrho_2{}^m},$$

so kann man sie summieren und erhält für $\mu \to \infty$:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f}_1(z) &= 0{,}2\, J\left[\log z - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{\varrho_1}{z}\right)^m - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{\varrho_1}{R_1{}^2}\right)^m \cdot z^m\right] + \text{konst.} \\ &= 0{,}2\, J\left[\log(z-\varrho_1) + \log\left(z - \frac{R_1{}^2}{\varrho_1}\right)\right] + \text{konst.} \end{aligned}\right\} \qquad (14\,a)$$

und ebenso:

$$\mathfrak{f}_2(z) = 0{,}2\, J\left[\log(z-\varrho_2) + \log\left(z - \frac{R_2{}^2}{\varrho_2}\right)\right] + \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\,b),$$

$$\mathfrak{f}_3(z) = 0{,}2\, J \log z + \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\,c).$$

Diese Resultate für den Grenzfall $\mu \to \infty$ gelten nach den Superpositionsgesetz für jede beliebige Polverteilung und gestatten folgende Schlüsse, die sich später auf allgemeinere Bereiche übertragen lassen werden:

Gemäß den Reinentwicklungen (14a) kann man die Magnetfelder beim Kreisring in solche, bei denen das Glied $0{,}2\, J \log z = a_0 \log z$ auftritt, und in solche bei denen es nicht vorhanden ist, d. h. in Felder mit endlicher und mit verschwindender Polsumme[1]) zerlegen.

Bei Feldern mit endlicher Polsumme in jedem Luftgebiete besteht das Eisenfeld nur aus dem reinen Zirkulationsfeld $a_0 \log z$ und ist ihr seiner Größe nach proportional.

Die Luftfelder müssen demnach auf dem Eisenrande eine konstante und der Polsumme gleichfalls proportionale Tangentialkomponente der Feldstärke besitzen, da diese dort stetig in das Eisen übergeht.

Bei Feldern mit verschwindender Polsumme in jedem Luftgebiete verschwindet auch das Eisenfeld und in jedem Luftbereich die Tangentialkomponente der Feldstärke auf dem Rande. Er bildet also dort eine Aequipotentiallinie. Diese Randbedingung tritt hier an Stelle der Gl. (4). Da in den Reihenentwicklungen ein Glied $a_0 \log z$ jetzt wegfällt, so erhält man die analytische Darstellung der Luftfelder allein durch Spiegelung der im Innern vorgegebenen Polverteilung am Rande [vergl. Gl. (14)].

3. Felder bei allgemeinen ebenen Rahmenformen. Die Längsschnitte durch den Rahmen eines Transformators enthalten zwei- und mehrfach zusammenhängende Eisenbereiche (vergl. Abb. 1 und 2). Für die Berechnung der zugehörigen Magnetfelder stehen prinzipiell verschiedene Methoden zur Verfügung:

Sie können einmal wie am Kreisring ermittelt werden. Die dort bei der Behandlung der allgemeinen Aufgabe auftretenden Potenzreihen zerfallen bei Zerlegung in Real- und Imaginärteil in solche von trigonometrischen Funktionen. An deren Stelle müssen hier andere der jeweiligen Rahmenform angepaßte Eigenfunktionen treten, aus welchen alsdann die gesuchte komplexe Funktion in bekannter Weise konstruiert werden kann[2]).

Ein weiterer Lösungsweg könnte sich darauf stützen, daß die konforme Abbildung die Randbedingungen (4) unverändert läßt. Man müßte dann von einer Vergleichsform ausgehen und z. B. die für den Kreisring berechneten Magnetfelder, sowie die dort gezogenen Schlüsse auf alle die Gebiete übertragen, welche sich auf seine drei Bereiche gemeinsam konform abbilden lassen. Nun ist aber eine Funktion, mit deren Hilfe die konforme Abbildung von Fenster-, Außen- und Eisenraum eine Längsschnittsform, Abb. 1, auf die entsprechenden Abschnitte des Kreisringes in eindeutiger Zuordnung geleistet

---

[1]) Polsumme entspricht dem mathematischen Begriff »Summe der Residien«, dem elektrotechnischen »Summe der Amperwindungen«.

[2]) Vergl. Bergmann, »Ueber die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen.« Dissertation. Berlin 1922. Mathematische Annalen, Bd. 86, S. 283 f. — Bergmann, »Ueber die Berechnung der Temperaturverteilung im Rotor einer Dynamomaschine«. Diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), S. 402 bis 413.

wird, für Bereiche mit singulären Randpunkten, also z. B. für den rechteckigen Rahmen, Abb. 4a, nicht vorhanden[1]). Das Gleiche gilt natürlich für den Fall Abb. 2, in welchem Längsschnittformen mit dreifach zusammenhängenden Eisenbereichen aufeinander abzubilden wären. Auch hier müßten wir von einer noch zu wählenden Vergleichsform ausgehen.

Wir beschränken uns deshalb von vornherein auf den Grenzfall $\mu \to \infty$ und übertragen die beim Kreisring abgeleiteten Prinzipien in folgender Weise:

a) Auf dem Eisenrande ist nach (4): $\mathfrak{B}_n^{\text{Eisen}} = \mathfrak{B}_n^{\text{Luft}}$.

$\mathfrak{B}_n^{\text{Luft}}$ muß stets endlich sein, da in dem Luftraum nur endliche Flüsse austreten können.

Dann geht auf dem Eisenrande wegen $\mu \to \infty$ die Normalkomponente der Feldstärke $\mathfrak{H}_n^{\text{Eisen}} = \frac{1}{\mu} \mathfrak{B}_n^{\text{Eisen}} \to 0$.

Demnach sind die Grenzen eines jeden Rahmens, Abb. 1 und 2, für das Magnetfeld des Eisengebietes als Flußlinien anzusehen. Diese Schlußweise setzt voraus, daß die aus der Luft in das Eisen eintretenden Flüsse klein sind gegenüber dem vollkommen im Eisen verlaufenden Fluß.

b) Wir schicken ferner den bekannten Satz aus der Potentialtheorie voraus, nach welchem die Gesamtintensität einer in der ganzen Ebene vorgegebene Polverteilung verschwinden, also z. B. im Falle Abb. 1 die Stärke der im Innengebiet befindlichen Wirbelverteilung entgegengesetzt gleich der entsprechenden des Außengebietes sein muß. Dieser Satz deckt sich mit der selbstverständlichen Voraussetzung, daß wir es überall mit geschlossenen Windungen zu tun haben, daß also die ein Fenster der Abb. 1 und 2 passierenden Ströme durch das Außengebiet bzw. durch ein etwa vorhandenes zweites Fenster zurückkehren müssen.

c) Für die Rahmenform, Abb. 1, haben das Ergebnis aus a), sowie der unter b) genannte Satz folgende Bedeutung:

Das Feld ihres Zwischengebietes ist seiner Stärke nach der Gesamtintensität einer im Innen- und Außengebiet vorgegebenen Wirbelverteilung proportional und unabhängig von deren Lage. Es kann also als Normalfeld bezeichnet werden.

Zur Erläuterung des vorstehenden Satzes bemerken wir, daß zunächst für den Kreisring in der Gl. (14c) ein solches Normalfeld existiert, indem es mit dem reinen Zirkulationsfeld $0{,}2\, J \log z$ identisch ist Es läßt sich alsdann mit Hilfe einer konformen Abbildung, welche die Randfeldlinien ineinander überführt, auf jedes durch Abb. 1 gekennzeichnete Zwischengebiet übertragen[2]), besitzt dort also wie beim Kreisring die eingangs genannten Eigenschaften.

d) Für eine Rahmenform, Abb. 2, also für ein dreifach zusammenhängendes Zwischengebiet, lassen sich, wenn wir die unter b) und c) ausgesprochenen Sätze sinngemäß erweitern, zwei voneinander unabhängige Normalfelder definieren. Hierfür legen wir z. B. eine Polverteilung mit endlicher Gesamtintensität einmal in das erste, das andere Mal in das zweite Fenster, wobei jedesmal die Gegenpole im Außengebiet erscheinen

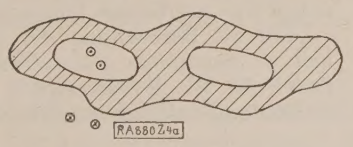

Abb. 4a.

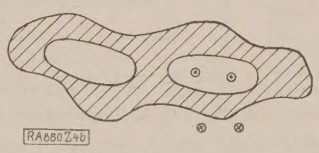

Abb. 4b.

(vergl. Abb. 4a und 4b). Aus den beiden Normalfeldern können wir alsdann alle für $\mu \to \infty$ im Zwischengebiet vorkommenden Feldverteilungen linear zusammensetzen. Von diesem aus der Potentialtheorie bekannten Satze hat bereits St. Bergmann bei der

---

[1]) Vergl. Caratheodory, »Ueber die gegenseitige Beziehung der Ränder des Innern einer Jordanschen Kurve bei der Abbildung auf einen Kreis.« Mathemathische Annalen, Bd. 73, S. 305—320.

[2]) Den Beweis der eindeutigen Existenz solcher Abbildungen findet man bei Schottky: »Ueber die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen.« Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 83 (1877), S. 300 f.

Berechnung des Magnetfeldes im rechteckigen Rahmen eines Dreiphasentransformators Gebrauch gemacht[1]).

e) *Für ein p-fach zusammenhängendes Eisengebiet läßt sich im Anschluß an die unter c) und d) gemachten Ausführungen leicht die Existenz $p-1$ voneinander unabhängiger Normalfelder nachweisen, welche übrigens je in mindestens zwei getrennten Luftbereichen liegen und dort eine von Null verschiedene Gesamtintensität besitzen müssen.* Diese $p-1$ Normalfunktionen sind ein Analogon zu den n-Leiterpotentialen, aus welchen Plemelj[2]) die allgemeine Lösung der zu dem elektrischen Felde von n getrennt liegenden Induktoren gehörigen Integralgleichnung zusammensetzt.

Für $p = 1$, d. h. in einem einfach zusammenhängenden Eisenbereich darf nach dem hier ausgesprochenen Satze kein Normalfeld vorhanden sein. Da nämlich nur endliche Flüsse aus dem Eisen in den Luftraum hinaustreten können, so muß im ersteren für den Grenzfall $\mu \to \infty$ die Feldstärke überall verschwinden.

f) Mit den unter c), d) und e) definierten Normalfeldern ist auf dem Eisenrande $\mathfrak{H}_t^{\text{Eisen}}$ überall bestimmt.

Nach Gl. (4) haben wir $\mathfrak{H}_t^{\text{Eisen}} = \mathfrak{H}_t^{\text{Luft}}$ zu setzen.

Also ist auf der Grenze jedes Luftbereiches die Tangentialkomponente der Feldstärke $\mathfrak{H}_t^{\text{Luft}}$ überall unabhängig von der Lage der Pole im Innern vorgegeben. Diese Verteilung von $\mathfrak{H}_t^{\text{Luft}}$ kann statt der Gl. (4) eine notwendige und hinreichende Randbedingung für die Felder des Innen- und Außengebietes bilden.

g) Die Normalfelder verschwinden entsprechend ihrer unter c), d) und e) gegebenen Definition, sowie unter Berücksichtigung des unter b) genannten Satzes nur für den Fall, daß in jedem Luftbereiche die Gesamtintensität der dort vorgegebenen Polverteilung den Wert Null besitzt. Dann ist nach (4) auf dem Eisenrande $\mathfrak{H}_t^{\text{Luft}} = 0$. Er bildet also eine Aequipotentiallinie des zugehörigen Magnetfeldes.

Deshalb ermöglicht die Zerlegung des für einen Luftbereich gesuchten Magnetfeldes in ein Feld mit endlicher und in ein solches mit verschwindender Gesamtintensität der Pole im Innern, in welchem also der Eisenrand eine Aequipotentiallinie bildet, einen besonders einfachen Uebergang von den oben am Kreisring durchgeführten Feldberechnungen zur Lösung allgemeinerer Aufgaben.

Diese Eigenschaft nämlich bleibt erhalten, wenn z. B. das im Fenster einer allgemeinen Längsschnittsform, Abb. 1 und 2, definierte Feld auf das Innengebiet des Kreisringes abgebildet wird; d. h. das entsprechende Magnetfeld im Kreisringfenster ist orthogonal zur Eisenoberfläche. Seine komplexe Funktion enthält also nach den Ausführungen auf Seite 8 neben einer Polverteilung im Innern nur deren am Rande gespiegeltes Bild. Das Gleiche muß dann auch für das Luftgebiet, von welchem wir ausgingen nach dem Spiegelungsprinzip von Bernhard Riemann und H. A. Schwarz[3]) gelten, wenn wir die eben angegebene konforme Abbildung rückwärts verfolgen. Auch hier werden so wie beim Kreisring alle Funktionswerte am Rande mitgespiegelt.

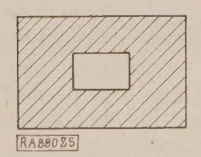

Abb. 5.

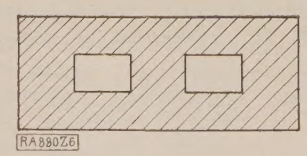

Abb. 6.

Für die Berechnung der unter c), d) und e) genannten Normalfelder ist bereits von St. Bergmann[4]) durch die Aufstellung des Magnetfeldes eines recht-

[1]) St. Bergmann, »Ueber die Bestimmung der Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals aus seinen Periodicitätsmoduln mit Anwendungen auf die Theorie des Transformators.« Mathematische Zeitschrift 1923, Bd. 19, S. 8 f.

[2]) Plemelj, »Potentialtheoretische Untersuchungen.« Preisarbeit. Leipzig 1911.
Plemelj, »Ueber lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie.« Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. V (1904), S. 372 f, S. 389.

[3]) Vergl. Hurwitz-Courant, »Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen.« S. 349 und 374.

[4]) Bergmann, »Ueber die Berechnung des magnetischen Feldes in Einphasentransformatoren.« Ztschrft. f angew. Math. u. Mech., Bd. V (1925), S. 319 f.
Bergmann, »Ueber die Bestimmung der Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals aus seinen Periodicitätsmoduln mit Anwendungen auf die Theorie des Transformators.« Math. Ztschrft., Bd. 19 (1923), S. 8 f.

eckförmigen Rahmens mit zwei- und dreifach zusammenhängenden Zwischengebiet (siehe Abb. 5 und 6) ein Beispiel geliefert worden. Diese Normalfelder nämlich können auch näherungsweise mit Hilfe von konformen Abbildungen zusammengesetzt werden, in welchen im allgemeinen nur elliptische Funktionen auftreten[1]).

Die Berechnung der Eisenfelder in den meistens ausgeführten Rahmenformen (Abb. 5 und 6) ist also im allgemeinen geklärt. Deshalb wollen wir uns im Folgenden auf die Untersuchung ihrer Luftfelder beschränken, deren Kenntnis auch zur Ermittlung der Streuung ausreichen wird.

4. Feld bei ebener Wand. Bei fast allen bisher veröffentlichten Berechnungen des Magnetfeldes im Luftbereich eines Transformators ist der Einfluß eines Schenkels und seiner Wicklungen vernachlässigt und statt des anderen eine unendlich große und ebene Wand betrachtet. Für diesen Fall soll hier die exakte Feldberechnung durchgeführt werden.

Abb. 7.

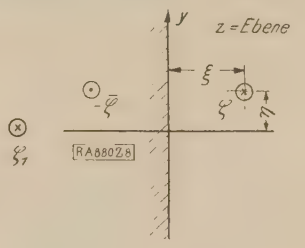

Abb. 8.

Wir beschränken uns auf den Grenzfall $\mu^{\text{Eisen}} \to \infty$ und stellen vorerst das Feld einer einzigen vom Strome J durchflossene Windung auf, d. h. der Pole in den Punkten ζ_1 und ζ_2 auf der rechten bzw. auf der linken Seite der Wand (siehe Abb. 7). Außerdem denken wir uns vorübergehend das vorliegende Modell als Grenzfall eines Kreisringes mit unendlich großem Radius. Dementsprechend ergibt die Uebertragung des Beweises auf Seite 8, daß die Tangentialkomponente der Feldstärke auf den Grenzen der einzelnen Bereiche konstant ist. Dann aber verschwindet sie, da das über den unendlich langen Eisenrand erstreckte $\int \mathfrak{H}\, d\,\mathfrak{s}$ einen endlichen Wert besitzt (Amperesches Gesetz). Mithin werden die beiden Luftgebiete von Aequipotentiallinien begrenzt und ihre Magnetfelder dürfen nach der Schlußweise auf Seite 10 (g) mit Hilfe des dort angegebenen Spiegelungsverfahrens ermittelt werden. So können wir unsere Untersuchungen auf den rechts der Wand gelegenen Bereich beschränken und dessen Feld durch Einzelpolpaare nach Abb. 8 darstellen, wobei die Ordinate des Achsenkreuzes mit dem Eisenrande zusammenfällt. Die zubehörige komplexe Funktion lautet:

$$f(z) = -\,0{,}2\,J\,[\log(z-\zeta) + \log(z+\bar{\zeta})] \quad . \quad (15).$$

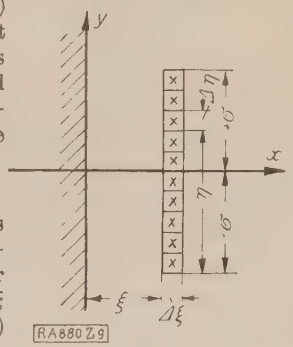

Abb. 9.

Wir schreiben $\zeta = \xi + i\,\eta$ und berechnen zunächst das Feld einer zur Ordinate parallelen und zur x-Achse symmetrischen Wirbellinie im Abstande ξ von der Wand mit der Länge $2\,\sigma$, bzw. eines Belegungsstreifens von der Breite $\Delta\,\xi$ (s. Abb. 9). Zu der entsprechenden komplexen Funktion $\mathfrak{d}\,\mathfrak{F}(z)$ gehöre die Flußfunktion $d\,\psi =$ Realteil $\{\mathfrak{d}\,\mathfrak{F}(z)\}$. Der Strom eines Streifenelements von der Höhe $\Delta\,\eta$ hat die Größe:

$$J = \mathfrak{j} \cdot \Delta\,\xi \cdot \Delta\,\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Wir gehen wie in (3) zu der $\mathfrak{d}\,\mathfrak{F}(z)$ entsprechenden Feldstärkefunktion $\mathfrak{d}\,\mathfrak{G}(z)$ über, nennen $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_x$ und $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_y$ die zugehörigen Komponenten der Feldstärke, setzen bei der Integration über η aus Symmetriegründen für $\bar{\zeta}$ den Wert von ζ ein und bilden mit Hilfe von (15) und (16):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{d}\,\mathfrak{G}(z) = \mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_x - i\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_y &= -\,i\,\frac{d\,[\mathfrak{d}\,\mathfrak{F}(z)]}{d\,z} = -\,i\,\frac{d}{d\,z}\Big[\int_{\eta=-\sigma}^{\eta=+\sigma} f(z)\Big] \\ &= -\,0{,}2\,\mathfrak{j}\,\Delta\,\xi\,2\,i\Big[\pi + \operatorname{arctg}\frac{z-\xi}{\sigma} + \operatorname{arctg}\frac{z+\xi}{\sigma} + k\,\pi\Big] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (17).$$

k bedeutet hierbei eine ganze Zahl, während wir unter den Arcustangenten Hauptwerte verstehen wollen. Da $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_y$ auf dem Eisenrande, z. B. für $z = 0$ verschwinden muß, so erhält man $k = -\,1$.

[1]) Vergl. Bergmann, Ueber die Berechnung des magnetischen Feldes in Einphasentransformatoren.« Diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 319f.

Die Flußfunktion ψ einer verteilten rechteckförmigen Belegung gegenüber unserer Wand (Abb. 10a) läßt sich nach Abschnitt **1** nur außerhalb der Belegungsflächen als Realteil einer komplexen Funktion ermitteln. Deshalb zerlegen wir bei der Darstellung von ψ innerhalb des Streifens $-\lambda < y < +\lambda$ die Strombelegung entsprechend den Abb. 10b und 10c und ordnen ihnen bzw. die Funktionen ψ^I und ψ^{II} zu, d. h.

$$\psi = \psi^I + \psi^{II} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Die einem Streifen dieser Belegungen zugeordneten Funktionen erhalten sämtlich sinngemäß dieselben oberen Indices I und II. Alsdann bilden wir zunächst für das Feld Abb. 10b mit Hilfe von (17):

$$\mathfrak{d}\,\mathfrak{G}^I(z) = \mathfrak{d}\,\mathfrak{H}^I - i\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_y^I = -0{,}2\,\mathfrak{j}\,\Delta\xi\,2\,i\lim_{\sigma\to\infty}\left[\operatorname{arctg}\frac{z-\xi}{\sigma} + \operatorname{arctg}\frac{z+\xi}{\sigma}\right].$$

Hieraus folgt für $0 < x < \xi$: $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_x^I = 0$, $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_y^I = 0$.

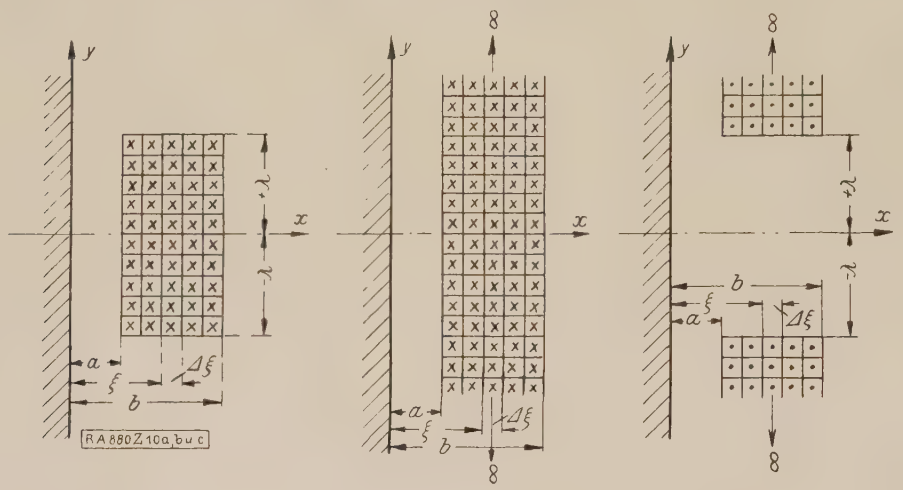

Abb. 10a. Abb. 10b. Abb. 10c.

Beim Durchgang durch einen Belegungsstreifen in Richtung von $x < \xi$ nach $\xi < x$ ändert sich $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_y$ bekanntlich um $-0{,}4\,\pi\,\mathfrak{j}\,\Delta\xi$; deshalb ist für $\xi < x$: $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_x^I = 0$, $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_y^I = -0{,}4\,\pi\,\mathfrak{j}\cdot\Delta\xi$. Im Falle einer durchgehend unendlich langen Belegung entsteht also ein reines Parallelfeld, welches überdies zwischen ihr und dem Eisenrande verschwindet. Demgemäß schließt man:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Für } 0 < x < a\text{:}\quad \mathfrak{H}_y^I = 0\,, \qquad \psi^I = 0\\
&\text{Für } a < x < b\text{:}\quad \mathfrak{H}_y^I = \int_{\xi=a}^{\xi=x} \mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_y^I = -(x-a)\,0{,}4\,\pi\,\mathfrak{j}\,, \qquad \psi^I = -0{,}4\,\pi\,\mathfrak{j}\cdot\frac{(x-a)^2}{2}\\
&\text{Für } b < x\text{:}\quad \mathfrak{H}_y^I = \int_{\xi=a}^{\xi=b} \mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_y^I = -(b-a)\,0{,}4\,\pi\,\mathfrak{j}\,, \quad \psi^I = -0{,}4\,\pi\,\mathfrak{j}\,(b-a)\left[x - \frac{b+a}{2}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (19).$$

Wobei über die bei der Integration von $\mathfrak{H}_y^I$ auftretende unbestimmte Konstante durch die Forderung $\psi^I = 0$ für $x = a$ verfügt worden ist.

Weiterhin folgt nach (17) für das Feld Abb. 10c zwischen $y = -\lambda$ und $y = +\lambda$:

$$\mathfrak{d}\,\mathfrak{G}^{II}(z) = -0{,}2\,\mathfrak{j}\,\Delta\xi\,2\,i\lim_{\sigma\to\infty}\left[-\operatorname{arctg}\frac{z-\xi}{\sigma} - \operatorname{arctg}\frac{z+\xi}{\sigma} + \operatorname{arctg}\frac{z-\xi}{\lambda} + \operatorname{arctg}\frac{z+\xi}{\lambda}\right]$$

und schließlich:

$$\left.\begin{aligned}
\psi^{II} &= \int_{\xi=a}^{\xi=b} d\,\psi^{II} = \int_{\xi=a}^{\xi=b} \text{Realteil}\left\{i\int \mathfrak{d}\,\mathfrak{G}^{II}(z)\,dz\right\}\\
&= \text{Realteil}\Big\{i\,0{,}1\,\mathfrak{j}\sum_{\alpha\beta}(-1)^{\alpha+\beta}\big\langle[\lambda+(-1)^\alpha(z+(-1)^\beta a)]\log[\lambda+(-1)^\alpha(z+(-1)^\beta a)]\\
&\quad -[\lambda+(-1)^\alpha(z+(-1)^\beta b)]\log[\lambda+(-1)^\alpha(z+(-1)^\beta b)]\big\rangle\Big\} + \text{konst.}
\end{aligned}\right\} \quad (20),$$

wobei für α und β jeweils die Zahlen 1 und 2 einzusetzen sind.

Die in den Gebieten $y < -\lambda$ und $+\lambda < y$ der Abb. 10a gültige Flußfunktion ψ hat dann dieselbe Form wie ψ^{II} in (20).

5. Innenfeld beim rechteckigen Schacht. Bei der Berechnung des Magnetfeldes im Fenster eines rechteckigen Rahmens (Abb. 5 und 6) beschränken wir uns von vorn herein auf den S. 10 (g) behandelten Fall, daß bei $\mu^{\text{Eisen}} \to \infty$ die Gesamtintensität der in jedem Luftbereiche vorgegebenen Polverteilung den Wert Null besitzt. Somit erhält man nach **3a** die komplexe Funktion $f(z)$ des zugehörigen elementaren Magnetfeldes durch fortgesetzte Spiegelung seiner beiden Pole ζ_1 und ζ_2 (siehe Abb. 11) an allen vier Rechtecksseiten. Die Pole ζ_1 und ζ_2 bedeuten hierbei zwei von den Strömen $+J$ und $-J$ durchflossene Windungen. Gleicherzeit seien alle Abmessungen auf die Fensterbreite $D = 1$ reduziert, so daß seine Höhe den Wert 2τ annimmt. Durch die Spiegelung entsteht ein doppelperiodisches Polgitter (Abb. 12). Da alle Funktionswerte mitgespiegelt werden, so ist $f(z)$ eine doppelperiodische Funktion mit einem primitiven Periodenrechteck von der Länge 2 und der Höhe 4τ. Sie läßt sich außerdem aus Logarithmen von Funktionen, deren Nullstellen in den Polen des Gitters (Abb. 12) liegen, linear zusammensetzen. Als solche sind uns mit Hinblick auf die Periodizität dieser Polverteilung die elliptischen Thetafunktionen[1]) bekannt. Eine jede von ihnen besitzt ein einfaches Gitter von Nullstellen, von denen also in ein primitives Periodenrechteck $(2, 4\tau)$ immer nur eine fällt. Entsprechend der Anzahl der dort vorgegebenen Pole wären deshalb zur Aufstellung von $f(z)$ acht Thetafunktionen notwendig.

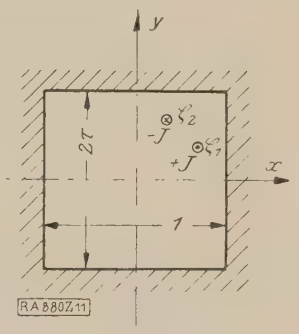

Abb. 11.

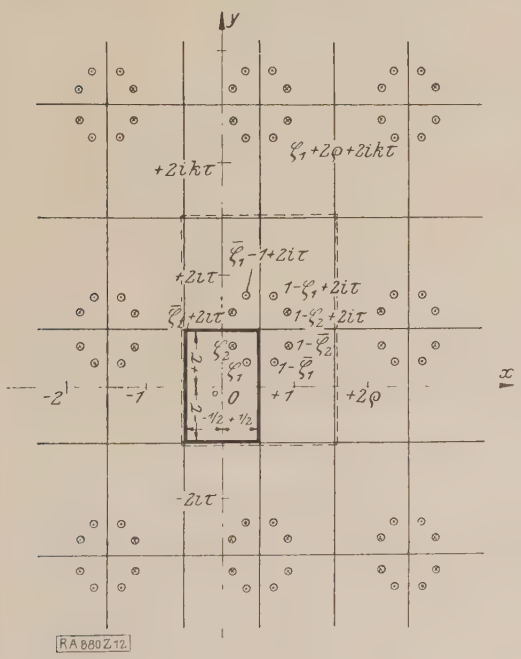

Abb. 12.

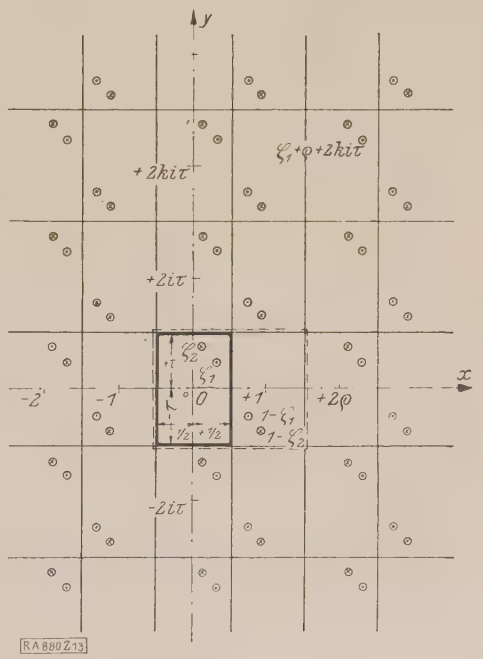

Abb. 13.

Diese Zahl läßt sich auf die Hälfte reduzieren, wenn nur Felder von zur x-Achse symmetrischen Belegungsflächen (Abb. 15a) berechnet werden. Dann dürfen wir nämlich in $f(z)$ $\bar{\zeta}_1$ mit ζ_1 und $\bar{\zeta}_2$ mit ζ_2 vertauschen, ohne das Resultat der nachfolgenden Integrationen zu verändern. Die so definierte neue Funktion von $\overline{f(z)}$ besitzt ein periodisches

[1]) Siehe Krause, »Elliptische Funktionen« S. 32.

Polgitter (Abb. 13) und hat für uns nur mathematische, nicht aber physikalische Bedeutung, da sie die eingangs gestellten Randbedingungen nicht mehr erfüllt. $f(z)$ bleibt eine doppelperiodische Funktion, jedoch mit einem primitiven Periodenrechteck von der Länge 2 und der Höhe 2τ. Es ist also halb so hoch als in Abb. 12 und enthält demgemäß nur die vier Pole in den Punkten ζ_1, ζ_2, $1-\zeta_1$ und $1-\zeta_2$. Dementsprechend läßt sich $f(z)$ aus vier Logarithmen je einer Thetafunktion linear zusammensetzen. Es liegen nämlich[1]) in den Periodenpunkten $\zeta_1 + 2\varrho + 2ki\tau$ die Nullstellen der Funktion $\vartheta_1\left(\frac{z-\zeta_1}{2}, \tau\right)$, in $\zeta_2 + 2\varrho + 2ki\tau$ jene von $\vartheta_1\left(\frac{z-\zeta_2}{2}, \tau\right)$, in $1-\zeta_1 + 2\varrho + 2ki\tau$ jene von $\vartheta_2\left(\frac{z+\zeta_1}{2}, \tau\right)$ und endlich in $1-\zeta_2 + 2\varrho + 2ki\tau$ jene von $\vartheta_2\left(\frac{z+\zeta_2}{2}, \tau\right)$. Hierbei verstehen wir unter[1]):

$$\vartheta_1(v) = 2\,c\,q^{1/4}\sin\pi v \prod_{x=1}^{\infty}(1-q^{2x}e^{2i\pi v})(1-q^{2x}e^{-2i\pi v}) \quad . \quad . \quad (21\,a),$$

$$\vartheta_2(v) = 2\,c\,q^{1/4}\cos\pi v \prod_{x=1}^{\infty}(1+q^{2x}e^{2i\pi v})(1+q^{2x}e^{-2i\pi v}) \quad . \quad . \quad (21\,b),$$

wobei (21c) $q = e^{-\pi\tau} = e^{-\pi\, t/D}$ bedeutet.

Aus diesen Funktionen bilden wir:

$$f(z) = 0{,}2\,J\left[\log\vartheta_1\left(\frac{z-\zeta_1}{2},\tau\right) + \log\vartheta_2\left(\frac{z+\zeta_1}{2},\tau\right) - \log\vartheta_1\left(\frac{z-\zeta_2}{2},\tau\right) - \log\vartheta_2\left(\frac{z+\zeta_2}{2},\tau\right)\right] \quad (22).$$

Unter Rückkehr zu den wirklichen Dimensionen (Abb. 15) erscheint Gl. (22) in folgender Gestalt:

$$f(z) = 0{,}2\,J\left[\log\vartheta_1\left(\frac{z-\zeta_1}{2\,D}, \frac{t}{D}\right) + \log\vartheta_2\left(\frac{z+\zeta_1}{2\,D}, \frac{t}{D}\right) - \log\vartheta_1\left(\frac{z-\zeta_2}{2\,D}, \frac{t}{D}\right) - \log\vartheta_2\left(\frac{z+\zeta_2}{2\,D}, \frac{t}{D}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).^{2})$$

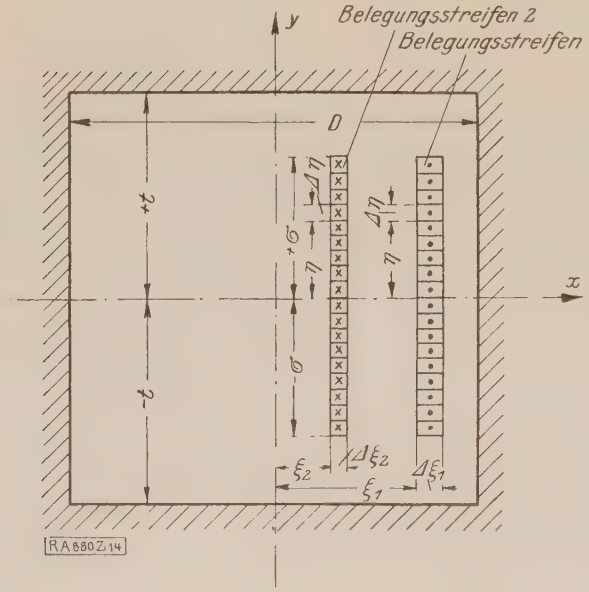

Abb. 14.

Wir setzten $\zeta_1 = \xi_1 + i\,\eta_1$; $\zeta_2 = \xi_2 + i\,\eta_2$ und berechnen nunmehr das Feld zweier zur y-Achse paralleler und zur x-Achse symmetrischer gleichlanger Belegungsstreifen (Abb. 14). Die Breite des einen sei $\Delta\xi_1$, die des anderen $\Delta\xi_2$, während ihre Stromdichten j_1, bzw. $-\frac{n_1}{n_2}j_2$ [3]) genannt sein sollen. Da nach unseren Voraussetzungen die Summe der Strombelegungen verschwinden muß, so folgt für den Strom J eines Streifenelementes:

$$J = j_1\cdot\Delta\xi_1\cdot\Delta\eta = \frac{n_1}{n_2}j_2\,\Delta\xi_2\cdot\Delta\eta \quad (24).$$

So kann die Funktion $f(z)$ aus Gl. (22) einem aus den beiden Streifen ausgeschnittenem Elementenpaare zugeordnet werden, welches dieselbe Ordinate $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ besitzen soll. Weiterhin gehöre zu den beiden Belegungsstreifen Abbild. 14 die Flußfunktion $\mathfrak{d}\,\psi$, die

[1]) Siehe Krause, »Elliptische Funktionen« S. 29 f.

[2]) Das immer gleichbleibende Periodenverhältnis t/D geben wir in den späteren Funktionen nicht besonders an.

[3]) Der Faktor n_1/n_2, das Verhältnis der den Strombelegungen zugeordneten Windungszahlen n_1 und n_2, wurde hinzugefügt, um späterhin alle Funktionen gleichmäßig auf einen in den Windungen fließenden Strom 1 reduzieren zu können.

komplexe Funktion $\mathfrak{d}\,\mathfrak{F}(z)$ und die Funktion $\mathfrak{d}\,\mathfrak{G}(z)$ mit den beiden Komponenten der Feldstärke $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_x$ und $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_y$. Jn diesen Rahmen erhält man aus den Gl. (3), (23) und (24):

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{d}\,\mathfrak{G}(z) = \mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_x - i\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_y = -i\,\frac{d}{dz}\left\{\int_{\eta=-\sigma}^{\eta=+\sigma}\bar{f}(z)\right\} = 0{,}2\,\frac{J}{\Delta\,\eta}\Big[-\log\vartheta_1\left(\frac{z-\xi_1-i\,\sigma}{2\,D}\right)\\ +\log\vartheta_1\left(\frac{z-\xi_1+i\,\sigma}{2\,D}\right)+\log\vartheta_2\left(\frac{z+\xi_1+i\,\sigma}{2\,D}\right)-\log\vartheta_2\left(\frac{z+\xi_1-i\,\sigma}{2\,D}\right)\\ +\log\vartheta_1\left(\frac{z-\xi_2-i\,\sigma}{2\,D}\right)-\log\vartheta_1\left(\frac{z-\xi_2+i\,\sigma}{2\,D}\right)-\log\vartheta_2\left(\frac{z+\xi_2+i\,\sigma}{2\,D}\right)\\ +\log\vartheta_2\left(\frac{z+\xi_2-i\,\sigma}{2\,D}\right)\Big]\end{aligned}\right\}\quad(25).$$

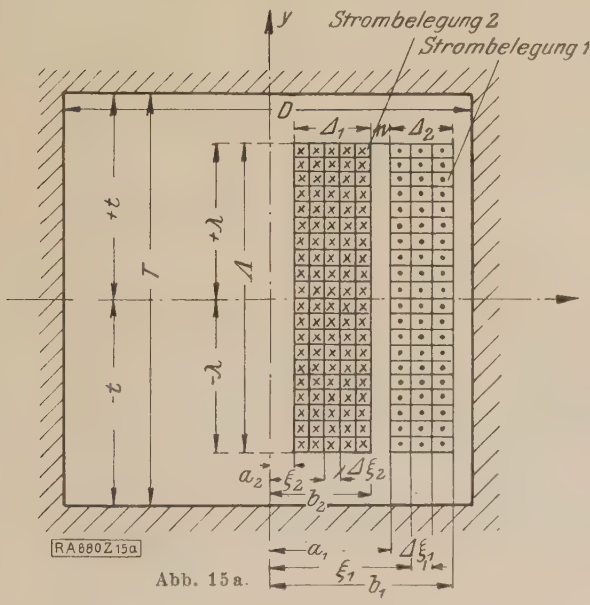

Abb. 15a.

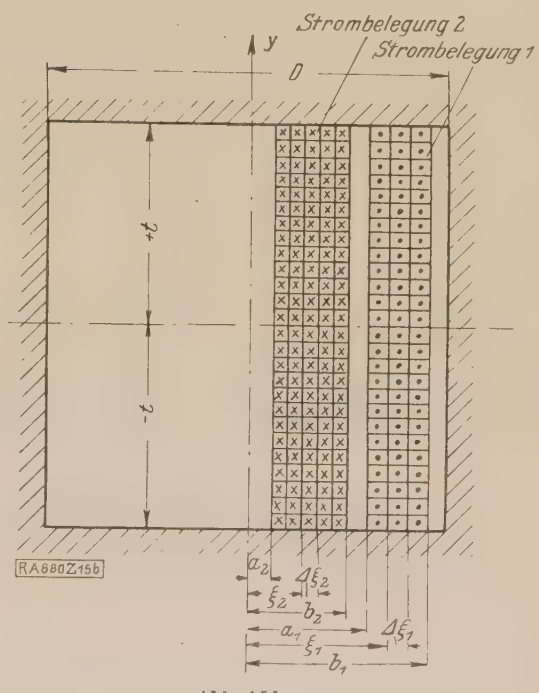

Abb. 15b.

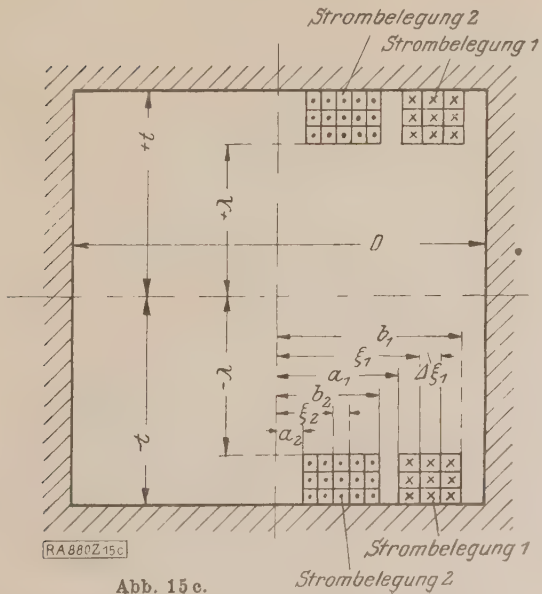

Abb. 15c.

Die Flußfunktion ψ zweier rechteckförmiger Belegungsflächen (Abb. 15a) ist wieder nur außerhalb dieser Gebiete als Realteil einer komplexen Funktion darstellbar. Deshalb zerlegen wir zur Aufstellung von ψ im Streifen $-\lambda < y < +\lambda$ jene Stromflächen in zwei Rechtecke von der Fensterlänge $2\,t$ (Abb. 15b) und in den Rest Abb. 15c und ordnen ihnen bzw. die Funktionen ψ^{I} und ψ^{II} zu. Es heißt also für $-\lambda < y < +\lambda$:

$$\psi = \psi^{I} + \psi^{II} \quad . \quad . \quad (26).$$

Die Funktionen der den Belegungen Abb. 15b und c entsprechenden Elementarstreifen tragen dieselben oberen Indizes I und II.

Für die Berechnung von ψ^{I}, d. h. des Feldes Abb. 15b, ersetzen wir in (25) σ

durch t. Dann ist auf Grund der Darstellung (21) überall $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_x^I = 0$ und alle Logarithmen verschwinden bis auf eine additive Konstante $2\,k\,i\,\pi$. k bedeutet hierbei eine ganze Zahl. Nun steht nach den eingangs gestellten Randbedingungen unser Magnetfeld senkrecht auf der Eisenoberfläche, d. h. es ist z. B. für $z = {}^1/_2$, $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_y^I = 0$. Folglich wird $k = 0$. Beim Durchgang durch die Belegungsstreifen in Richtung der negativen x-Achse ändert sich die y-Komponente von $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}$ um $-0{,}4\,\pi\,\mathfrak{j}_1\,\Delta\,\xi_1$, bzw. $+0{,}4\,\pi\,\mathfrak{j}_2\,\Delta\,\xi_2$. Deshalb ist nach (24) zwischen ihnen, d. h. für $\xi_2 < x < \xi_1$: $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_y^I = -0{,}4\,\pi\,\mathfrak{j}_1\,\Delta\,\xi_1 = -0{,}4\,\pi\,\frac{n_1}{n_2}\,\mathfrak{j}_2\,\Delta\,\xi_2$, und für $-{}^1/_2 < x < \xi_2$, $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}_y^I = 0$. Wenn also zwei rechteckförmige Belegungsstreifen die Länge des Transformatorfensters besitzen, so erzeugen sie in den zwischen ihnen gelegenen Bereiche ein reines Parallelfeld, welches im übrigen Teile des Luftraums verschwindet. Demgemäß schließen wir (vergl. auch Abschnitt **4**)

$$\left.\begin{aligned}
&\text{für}\quad b_1 < x < {}^1/_2\colon\quad \mathfrak{H}_y^I = 0,\quad \psi_1 = 0,\\
&\text{für}\quad a_1 < x < b_1\colon\quad \mathfrak{H}_y^I = 0{,}4\,\pi\,\mathfrak{j}_1\,(b_1 - x),\quad \psi^I = 0{,}2\,\pi\,\mathfrak{j}_1\,(b_1 - x)^2,\\
&\text{für}\quad b_2 < x < a_1\colon\quad \mathfrak{H}_y^I = -0{,}4\,\pi\,\mathfrak{j}_1\,(b_1 - a_1) = -0{,}4\,\pi\,\frac{n_1}{n_2}\,\mathfrak{j}_2\,(b_2 - a_2),\\
&\qquad\qquad\qquad \psi^I = +0{,}2\,\pi\,\mathfrak{j}_1\,(b_1 - a_1)\,[a_1 + b_1 - 2\,x],\\
&\text{für}\quad a_2 < x < b_2\colon\quad \mathfrak{H}_y^I = -0{,}4\,\pi\,\frac{n_1}{n_2}\,\mathfrak{j}_2\,(x - a_2),\\
&\qquad\qquad\qquad \psi^I = +0{,}2\,\pi\,\mathfrak{j}_1\,(b_1 - a_1)\left[(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) - \frac{(x - a_2)^2}{b_2 - a_2}\right]\\
&\text{für}\quad -{}^1/_2 < x < a_2\colon\quad \mathfrak{H}_y^I = 0,\quad \psi^I = +0{,}2\,\pi\,\mathfrak{j}_1\,(b_1 - a_1)\,[(b_1 + a_1) - (b_2 + a_2)]
\end{aligned}\right\} \quad (27).$$

Die bei der Integration über $\mathfrak{H}_y^I$ auftretende unbestimmte Konstante ist hier durch die Forderung $\psi^I = 0$ für $x = b_1$ festgelegt worden.

Bei der Berechnung von ψ^{II}, d. h. des Feldes Abb. 15 c im Streifen $-\lambda < y < +\lambda$ wird uns die Darstellung dadurch erleichtert, daß $\mathfrak{d}\,\mathfrak{G}^{II}(z)$ nach (25) linear in zwei gleiche Funktionen zerfällt, von denen die eine nur von der Belegungsvariabeln ξ_1, die andere nur von ξ_2 abhängt. Es genügt also, alle Rechnungen für den einen Summanden allein durchzuführen, welchem wir in allen seinen Teilen das Zeichen α beilegen wollen. Diese Zerlegung kann nur formalen, nicht aber physikalischen Charakter tragen, da die mit ihrer Hilfe der Belegung α, deren Stromsumme ja von Null verschieden ist, zugeordneten Funktionen $\mathfrak{d}\,\psi_\alpha^{II}$, $\mathfrak{d}\,\mathfrak{G}_\alpha^{II}$ und ψ_α^{II} die eingangs vorgegebenen Randbedingungen nicht erfüllen. Jm Resultat dagegen stellt:

$$\psi^{II} = \psi^{II} - \frac{n_1}{n_2}\,\psi_2^{II} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28),$$

für $-\lambda < y < +\lambda$ die Flußfunktion des Feldes Abb. 15 c dar. Demnach ist nach (25):

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{d}\,\mathfrak{G}_\alpha^{II}(z) = +0{,}2\,\mathfrak{j}_1\,\Delta\,\xi_\alpha\Big[&-\log\vartheta_1\left(\frac{z - \xi_\alpha - i\,t}{2\,D}\right) + \log\vartheta_1\left(\frac{z - \xi_\alpha + i\,t}{2\,D}\right)\\
&+\log\vartheta_2\left(\frac{z + \xi_\alpha + i\,t}{2\,D}\right) - \log\vartheta_2\left(\frac{z + \xi_\alpha - i\,t}{2\,D}\right) + \log\vartheta_1\left(\frac{z - \xi_\alpha - i\,\lambda}{2\,D}\right)\\
&-\log\vartheta_1\left(\frac{z - \xi_\alpha + i\,\lambda}{2\,D}\right) - \log\vartheta_2\left(\frac{z + \xi_\alpha + i\,\lambda}{2\,D}\right) + \log\vartheta_2\left(\frac{z + \xi_\alpha - i\,\lambda}{2\,D}\right)\Big]
\end{aligned}\right\} \quad (29).$$

Außerdem verschwinden in (29) auf Grund der Darstellung (21) die ersten vier von t abhängigen Glieder. Für die restlichen vier Größen bilden wir z. B. [1]):

$$\begin{aligned}
\log\vartheta_1(v) = \log\left(\frac{c\cdot q^{1/4}}{\pm\,\mathrm{i}}\right) \pm i\,\pi\,v + \log(1 - e^{\mp 2\,i\,\pi\,v})\\
+ \sum_{x=1}^{\infty}\log(1 - q^{2\,x}\,e^{2\,i\,\pi\,v}) + \sum_{x=1}^{\infty}\log(1 - q^{2\,x}\,e^{-2\,i\,\pi\,v}) \quad . \quad . \quad . \quad (30),
\end{aligned}$$

wobei für die folgenden Entwicklungen $\log\sin\pi\,v$ so zu zerlegen ist, daß $|e^{\mp 2\,i\,v}| \leqq 1$ wird. Die Argumente der Thetafunktion in (29) lassen außerdem erkennen, daß im Bereiche des Fensters und für $x > 0$ überall $|q^{2\,x}\,e^{\pm 2\,i\,\pi\,v}| < M < 1$ ist. Für das Glied $e^{\pm 2\,i\,\pi\,v}$ sei das Zeichen w eingeführt. Unter diesen Umständen können wir für die Lo-

[1]) Siehe Krause, Elliptische Funktionen, S. 33.

garithmen ihrer Reihenentwicklungen verwenden, und diese sind auch integrabel. So bildet man zunächst für das erste Glied aus (30) in bekannter Weise $\log(1-w) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^m}{m}$ und erhält aus ihm bei der Berechnung von ψ^{II} Integrale von der Form:

$$\int_{w_0}^{w} \frac{\log(1-w)}{w}\, d\,w = -\int_{w_0}^{w} \left(\sum_{m=1} \frac{w^m - 1}{m} \right) d\,w\,.$$

Die Summe unter dem zweiten Integral konvergiert für $w < M < 1$ gleichmäßig, darf also dort gliedweise integriert werden. Wenn dagegen w den Wert 1 annimmt, was für einige Glieder von (29) zutrifft, so zerlege man:

$$\int_{w_0}^{1} \frac{\log(1-w)}{w}\, d\,w = \lim_{M \to 1} \left\{ \int_{w_0}^{M} \frac{\log(1-w)}{w}\, d\,w + \int_{M}^{1} \frac{\log(1-w)}{w}\, d\,w \right\}.$$

Hierbei ist:

$$\lim_{M \to 1} \int_{M}^{1} \frac{\log(1-w)}{w}\, d\,w \leqq \lim_{M \to 1} \frac{1}{M} \int_{M}^{1} \log(1-w)\, d\,w = 0\,.$$

Mithin gilt mit Einschluß von $|w| = 1$:

$$\int_{w_0}^{w} \frac{\log(1-w)}{w}\, d\,w = -\int_{w_0}^{w} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^{m-1}}{m} \right\} d\,w = -\left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^m}{m^2} \right]_{w_0}^{w}.$$

Die letzte Reihe konvergiert nunmehr für $|w| \leqq 1$ gleichmäßig.

Die unendlichen Reihen aus (30) können durch Entwicklung der einzelnen Glieder und Umordnung in bekannter Weise in folgende gleichmäßig konvergente Reihen umgeformt werden[1]):

$$\sum_{x=1}^{\infty} \log(1 - q^{2x} w) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^m}{m} \frac{q^{2m}}{1 - q^{2m}}\,.$$

Wir setzen weiterhin als bekannt voraus, daß gleichmäßig konvergente Reihen gliedweise addiert und beliebig oft integriert werden dürfen, und bilden von (29) und (30) ausgehend für $-\lambda < y < +\lambda$:

$$\left.\begin{aligned} \psi_\alpha^{II} &= \int_{\xi_\alpha = a_\alpha}^{\xi_\alpha = b_\alpha} \mathfrak{d}\, \psi_\alpha = \int_{\xi_\alpha = a_\alpha}^{\xi_\alpha = b_\alpha} \text{Realteil} \left\{ i \int \mathfrak{d}\, \mathfrak{G}_\alpha^{II}(z)\, d\,z \right\} \\ &= \text{Realteil} \left\{ \left(\frac{D}{\pi}\right)^2 0{,}4\,\pi\, i_\alpha \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left\langle \frac{2\,q^{2m}}{1-q^{4m}} \Im \sin m\,\frac{\pi}{D}\,\lambda - e^{-m\frac{\pi}{D}\lambda} \right\rangle \right. \\ &\quad \cdot \left\langle \left[\sin m\,\frac{\pi}{D}\,(z - b_\alpha) - \sin m\,\frac{\pi}{D}\,(z - a_\alpha) \right] \right. \\ &\quad \left. \left. -(-1)^m \left[\sin m\,\frac{\pi}{D}\,(z + b_\alpha) - \sin m\,\frac{\pi}{D}\,(z + a_\alpha) \right] \right\} \right\} + \text{Konst.} \end{aligned}\right\} \qquad (31).$$

Die Flußfunktionen ψ^I aus (27) und ψ_α^{II} aus (31) liefern in der Verbindung:

$$\psi = \psi^I + (\psi_1{}^{II} - \frac{n_1}{n_2}\,\psi_2{}^{II}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

eine analytische Darstellung des gesuchten Magnetfeldes Abb. 15a im Streifen $-\lambda < y < +\lambda$.

Um das gesamte Fensterfeld zu erhalten, reicht es wegen der zur x-Achse symmetrischen Anordnungen aus, die Flußfunktion ψ nur noch im Gebiete $+\lambda < y < t$ zu entwickeln. Hierfür zerlegen wir in gleicher Weise wie oben ψ^{II} auch:

$$\psi = \psi_1 - \frac{n_1}{n_2}\,\psi_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33),$$

[1]) Siehe Krause, Elliptische Funktionen, S. 33.

wobei

$$\left.\begin{aligned}\psi_\alpha &= \int_{\xi_\alpha=a_\alpha}^{\xi_\alpha=b_\alpha} \mathfrak{d}\,\psi_\alpha = \int_{\xi_\alpha=a_\alpha}^{\xi_\alpha=b_\alpha} \text{Realteil}\left\{i\int \mathfrak{d}\,\mathfrak{G}_\alpha(z)\,dz\right\}\\ &= \text{Realteil}\left\{-i\,0{,}4\left(\frac{D}{\pi}\right)^2 \mathfrak{j}_\alpha \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\,\mathfrak{Sin}\,m\,\frac{\pi}{D}\,\lambda\cdot e^{im\frac{\pi}{D}z}\cdot\left[\left(e^{-im\frac{\pi}{D}b_\alpha}-e^{-im\frac{\pi}{D}a_\alpha}\right)\right.\right.\\ &\quad -(-1)^m\left(e^{+im\frac{\pi}{D}b_\alpha}-e^{+im\frac{\pi}{D}a_\alpha}\right)\Big]\\ &\quad +0{,}4\left(\frac{D}{\pi}\right)^2 \mathfrak{j}_\alpha \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\,\frac{2\,q^{2m}}{1-q^{2m}}\,\mathfrak{Sin}\,m\,\frac{\pi}{D}\,\lambda\cdot\left[\left(\sin m\,\frac{\pi}{D}\,(z-b_\alpha)-\sin m\,\frac{\pi}{D}(z-a_\alpha)\right)\right.\\ &\quad \left.\left.-(-1)^m\left(\sin m\,\frac{\pi}{D}\,(z+b_\alpha)-\sin m\,\frac{\pi}{D}\,(z+a_\alpha)\right)\right]+\text{konst.}\right\}\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

wird.

II. Berechnung der Streuung.

1. Definition der Streuung aus den Transformatorgleichungen. Der technische Transformator ist in erster Linie dazu bestimmt, eine Wechselspannung in einem möglichst fest vorgegebenen Verhältnis zu verändern. Die Uebersetzung vermittelt bekanntlich der resultierende magnetische Fluß Φ_μ, welcher von den in Primär- und Sekundärwicklung fließenden zeitlich veränderlichen Strömen J_1 und J_2 herrührt. L_1 und L_2 sind die Selbstinduktivitäten, M die Gegeninduktivität, n_1 und n_2 die Windungszahlen dieser beiden Wicklungen. Unter der Annahme eines Idealfalles, daß Φ_μ sämtliche Windungen des Transformators gleichmäßig durchsetzt, stehen bekanntlich die primären und sekundären Klemmenspannungen E_1 und E_2 in dem festen Verhältnis $\frac{E_1}{E_2}=\frac{n_1}{n_2}$. Die Induktivitäten in dem festen Verhältnis:

$$L_1 : M : L_2 = n_1^2 : n_1 n_2 : n_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Wenn dagegen Φ_μ nicht gleichmäßig mit allen Windungen verkettet ist — dieser Fall allein ist physikalisch zu verwirklichen —, so wird das Uebersetzungsverhältnis $\frac{E_1}{E_2} > \frac{n_1}{n_2}$; d. h. es findet ein Spannungsverlust statt, welchem man mit Streuspannung bezeichnet. Zu ihrer Darstellung gehen wir von den elektrischen Gleichungen des Transformators aus, wobei wir unter Vernachlässigung des Ohmschen Spannungsabfalles infolge Wicklungswiderstandes, von Hysteresisverlusten etc. Strom- und Spannungskurven als sinusförmig annehmen können und unter ω die Winkelgeschwindigkeit der entsprechenden Vektoren im Kreisdiagramm verstehen. Dann ist:

$$E_1 = \mathfrak{j}\,\omega\,L_1\,J_1 + \mathfrak{j}\,\omega\,M\,J_2 \quad . \quad . \quad (36\,\text{a}); \qquad E_2 = \mathfrak{j}\,\omega\,M\,J_1 + \mathfrak{j}\,\omega\,L_2\,J_2 \quad . \quad . \quad (36\,\text{b}).$$

Durch Elimination von J_1 bezw. J_2 bildet man hieraus:

$$E_1 = \frac{M}{L_2}E_2 + \mathfrak{j}\,\omega\left(L_1-\frac{M^2}{L_2}\right)J_1 \quad (36\,\text{c}); \qquad E_2 = \frac{M}{L_1}E_1 + \mathfrak{j}\,\omega\left(L_2-\frac{M^2}{L_1}\right)J_2 \quad (36\,\text{d}).$$

In diesen Gleichungen faßt man:

$$L_1 - \frac{M^2}{L_2} = S_I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37\,\text{a})$$

als die auf den Primärkreis bezogene Gesamtstreuinduktivität,

$$L_2 - \frac{M^2}{L_1} = S_{II} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37\,\text{b})$$

als die auf den Sekundärkreis bezogene Gesamtstreuinduktivität auf, woraus unmittelbar die Beziehung

$$S_I = \frac{L_1}{L_2}S_{II} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

folgt. Dann gehen die aus den Gl. (36) und (37) herzuleitenden Relationen:

$$E_1 - \frac{M}{L_2}E_2 = \mathfrak{j}\,\omega\,S_I\,J_1 = Es_I = \text{primär bezogene Streuspannung} \quad . \quad . \quad (39\,\text{a}),$$

$$E_2 - \frac{M}{L_1}E_1 = \mathfrak{j}\,\omega\,S_{II}\,J_2 = Es_{II} = \text{sekundär bezogene Streuspannung} \quad (39\,\text{b})$$

in zwei verschiedenen Formen ein Maß für den gesamten Spannungsverlust im Transformator.

Für das Verhältnis zweier Induktivitäten kann beim technischen Transformator immer die Gl. (35) als Näherungswert zugrundegelegt werden, soweit nicht gerade nach den Abweichungen von diesen Größen gefragt wird, die für die Streuung maßgebend sind. So folgt zunächst aus Gl. (37):

$$S_I \approx \frac{n_1^2}{n_2^2} S_{II}^{1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Wir zerlegen ferner die Gesamtstreuinduktivitäten S_I und S_{II} in die bekannten primären und sekundären Einzelinduktivitäten:

$$S_1 = L_1 - \frac{n_1}{n_2} M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41\,a). \qquad S_2 = L_2 - \frac{n_2}{n_1} M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41\,b),$$

bilden also:

$$S_I = S_1 + \frac{n_1}{n_2} \frac{M}{L_2} S_2 \text{ bzw. } \approx S_1 + \frac{n_1^2}{n_2^2} S_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42\,a),$$

$$S_{II} = S_2 + \frac{n_2}{n_1} \frac{M}{L_1} S_1 \text{ bzw. } \approx S_2 + \frac{n_2^2}{n_1^2} S_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42\,b),$$

wobei freilich dieser Zerlegung infolge Einführung des Faktors $\frac{n_1}{n_2}$ eine gewisse Willkür anhaftet[2]).

Die Berechnung der Streuspannung ist nunmehr identisch mit der Herleitung der Induktivitäten S_I, S_{II}, S_1 und S_2 aus der oben entwickelten analytischen Darstellung von Magnetfeldern. Sie wird sich im Gegensatze zu vielen anderen die Streuspannung kennzeichnenden Größen — ich erinnere nur an die verschiedenartigen Kopplungs- und Streufaktoren — als besonders einfach erweisen.

2. Zusammenhang zwischen Streuinduktivität und Magnetfeld. Die Streuinduktivitäten S_I, S_{II}, S_1 und S_2 setzen sich nach den Gl. (37), (41) und (43) aus L_1, L_2 und M, also aus Flußverkettungen zusammen. Demgemäß beschäftigen wir uns zunächst mit der analytischen Darstellung von Flußverkettungen speziell ebener Magnetfelder.

Werden zwei Spulen α und β mit den Windungszahlen n_α und n_β betrachtet, so verstehe man unter $\psi_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} J_\alpha$ die Verkettung des Flußbildes Φ_α, welches von einem durch α gehenden Strome J_α erzeugt werde, mit den Windungen von β. Durch die Fläche ihrer i-ten Windung ströme der Fluß $\Phi_\alpha^{(i)}$. Alsdann bilde man definitionsgemäß:

$$\Psi_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n_\beta} \Phi_\alpha^{(i)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

In den von uns behandelten Spulenquerschnitten (Abb. 10a und 15a) sollen die einzelnen Windungen gleichmäßig in Richtung der x-Achse den Abstand Δx, in Richtung der y-Achse den Abstand Δy von einander haben, was eine homogene Stromverteilung bedeutet. Außerdem sei F_β die stromdurchflossene Querschnittsfläche von β, und es folgt:

$$\Delta x \cdot \Delta y = \frac{F_\beta}{n_\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Wir erweitern (49) mit $\Delta x \Delta y$ und erhalten:

$$\Psi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta y} \sum_{i=1}^{n_\beta} \Phi_\alpha^{(i)} \Delta x \Delta y = \frac{n_\beta}{F_\beta} \sum_{i=1}^{\frac{F_\beta}{\Delta x . \Delta y}} \Phi_\alpha^{(i)} \cdot \Delta y \cdot \Delta y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Man lasse jetzt Δx und Δy gegen Null gehen; d. h. es werden die Lücken zwischen den einzelnen Drähten infolge ihrer Isolation vernächlässigt. Der hierbei gemachte Fehler ist bereits von Rogowski[3]) abgeschätzt und als unwesentlich erkannt worden. Wir stellen uns demnach auf den gleichen Standpunkt. Also ist der Grenzübergang gestattet:

$$\Psi_{\alpha\beta} = \frac{n_\beta}{F_\beta} \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum_{i=1}^{\frac{F_\beta}{\Delta x . \Delta y}} \Phi_\alpha^{(i)} \Delta x \cdot \Delta y = \frac{n_\beta}{F_\beta} \iint_{F_\beta} \Phi_\alpha \, dx \, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

[1]) Das Zeichen $\approx$ bedeutet hier »annähernd gleich«. Es wird im Folgenden da, wo keine Verwechslung entstehen kann, wieder durch = ersetzt.

[2]) Vergl. Hemmeter, »Zur Klärung des Streubegriffes«. Archiv für Elektrotechnik 1927, S. 36 f.

[3]) Siehe Rogowski, »Ueber das Streufeld und den Streuinduktionskoeffizienten eines Transformators mit Scheibenwicklung und geteilten Endspulen.« Dissertation, Danzig 1908, S. 27 f.

Unter Φ_α verstehe man im allgemeinen den die Windungsflächen durchsetzenden Fluß. Statt dessen werden wir bei der Berechnung von ${}^1\Gamma_{\alpha\beta}$ auch von dem äquivalenten außen zurückströmenden Fluß ausgehen können, der sich dann entweder bis ins Unendliche oder bis an die Grenzen eines geschlossenen Flußgebietes hin erstreckt.

Schließlich geht durch die Einheit der vom Strome 1 durchflossenen Querschnittsfläche F_α der Spule α der Strom:

$$j_\alpha = \frac{n_\alpha}{F_\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47),$$

welcher mit der Strombelegung pro Flächeneinheit der unter I behandelten ebenen Felder identisch ist.

Wird der eingangs genannte Strom $J_\alpha = 1$ gesetzt, so gehen die Flußverkettungen in Induktivitäten über. Im Raume besitzen sie bekanntlich die Dimension cm. Deshalb sind alle aus unseren ebenen Feldern herzuleitenden Selbst-, Gegen- und Streuinduktivitäten pro Längeneinheit einer senkrecht zur z-Ebene stehenden Achse dimensionslose Größen, welche wir hier durch die Zeichen $l_{\alpha\beta}$, s_1, s_2, s_I und s_{II} von den im Raume definierten Elementen $L_{\alpha\beta}$, S_1, S_2, S_I und S_{II} unterscheiden wollen. $l_{\alpha\beta}$ bedeutet hierbei die Verkettung eines ebenen vom Strome $J_\alpha = 1$ erzeugten Flußbildes ψ_α mit den Windungen von β, wobei für unsere Rechnungen ψ_α der Strombelegung α nur formal zugeordnet zu sein braucht (vergl. (28) und (33)). Es lautet also auf Grund von (52):

$$l_{\alpha\beta} = \frac{n_\beta}{F_\beta} \iint\limits_{F_\beta} \psi_\alpha \, dx \, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48).$$

Mit diesen Hilfsmitteln können wir die Streuinduktivitäten magnetisch in zweierlei Form definieren.

Wir verstehen erstens in der üblichen Leerlaufdefinition unter $S_1 = L_1 - \frac{n_1}{n_2} M$ die Verkettung des Primärflusses Φ_1, welcher von dem Primärstrome 1 erzeugt werde, mit n_1 vermindert um seine mit $\frac{n_1}{n_2}$ reduzierte Verkettung mit n_2. Wir bilden also unter Vergrößerung von Φ_1 um eine beliebige Konstante C mit Hilfe von (46):

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{n_1}{F_1}\iint\limits_{F_1}(\Phi_1 + C)\,dx\,dy\right] - \frac{n_1}{n_2}\left[\frac{n_2}{F_2}\iint\limits_{F_2}(\Phi_1 + C)\,dx\,dy\right] \\ &= \left[\frac{n_1}{F_1}\iint\limits_{F_1}\Phi_1\,dx\,dy\right] - \frac{n_1}{n_2}\left[\frac{n_2}{F_2}\iint\limits_{F_2}\Phi_1\,dx\,dy\right] = S_1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (49).$$

Eine zu Φ_1 hinzugefügte Konstante liefert also keinerlei Beitrag zu S_1; d. h. es ist vollkommen gleichgültig, von welcher Flußlinie aus wir Φ_1 messen. Wir können sie demnach beispielsweise zwischen Strombelegung und Eisenrand legen. Dann aber erscheint ein Beitrag des im Eisengebiete selbst liegenden Magnetfeldes nicht in der Rechnung; d. h. S_1 und S_2 können allein aus Form und Größe der Luftfelder hergeleitet werden und sind gegenüber allen ähnlich definierten Streuinduktivitäten, in welchen jedoch M mit einem anderen Faktor als mit $\frac{n_1}{n_2}$ reduziert erscheint[1]), die einzigen, welche von der Größe des magnetischen Flusses im Eisen unabhängig sind.

Nach einer zweiten Betrachtungsweise, und zwar in Gegenschaltung nach Rogowski[2]), ist $S_1 = L_1 - \frac{n_1}{n_2} M$ die Verkettung des eben eingeführten Primärflusses Φ_1 mit n_1 vermehrt, um die Verkettung eines Sekundärflusses Φ_2, welcher vom Sekundärstrome $-\frac{n_1}{n_2}$ herrühre, ebenfalls mit n_1; d. h. im resultierenden Magnetfelde jener beiden Ströme ist die Summe aller Flußverkettungen mit n_1 ein Maß für S_1, jene mit n_2 ein Maß für $-\frac{n_1}{n_2} S_2$.

---

[1]) Vergl. z. B. Hallo, »Selbst- und gegenseitige Induktion«. Elektrotechnik und Maschinenbau 1914.

[2]) Rogowski und Simons, »Die Streuung bei Wechselstromtransformatoren und Kommutatoren«. Elektrotechnische Zeitschrift 1908 und 1910. Rogowski, »Ueber das Streufeld und den Streuinduktionskoeffizienten eines Trausformators mit Scheibenwicklung und geteilten Endspulen«. Dissertation, Danzig 1908.

Zur gesonderten Berechnung von S_1 und S_2 nach diesem Verfahren wäre, sofern wir von dem außen zurückströmenden Flusse ausgehen, die Kenntnis der Grenzlinie G notwendig, welche die n_1 und n_2 je umschließenden Flüsse von einander trennt. G hängt so auch vom Eisenfelde ab und dürfte meistens schwer bestimmbar sein. Dagegen zeigen wir sofort, daß die Gesamtstreuung hiervon unabhängig berechnet werden kann,

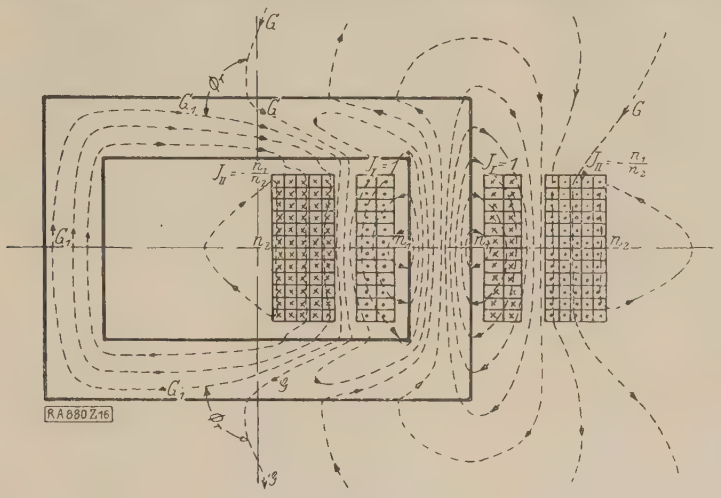

Abb. 16.

indem dann die Flüsse von einer beliebigen Feldlinie, z. B. von G_1 aus gezählt werden dürfen. Man vergleiche zur Erläuterung Abb. 16. Dort ist nämlich eine Gegenschaltung, und zwar das ebene Magnetfeld des Rahmens Abb. 5 mit zwei von den Strömen $J_I = 1$ und $J_{II} = -\frac{n_1}{n_2}$ durchflossenen Spulen von rechteckförmigem Querschnitt skizziert[1]). So verstehen wir unter Φ_{s_1} den von G aus gemessenen n_1 durchsetzenden primären Streufluß und unter $\Psi_{s_1} = S_1$ seine Verkettung mit n_1. In gleicher Weise gehöre zu n_2 der sekundäre Streufluß Φ_{s_2} und die Verkettung $\Psi_{s_2} = -\frac{n_1}{n_2} S_2$; $\overline{\Psi_{s_1}}$ und $\overline{\Psi_{s_2}}$ sind die analogen von G_1 aus gemessenen Verkettungen. Φ_r sei der zwischen G und G_1 strömende magnetische Fluß. Dann folgt mit Hilfe von (46):

$$\overline{\Psi_{s_1}} = \frac{n_1}{F_1}\iint_{F_1}(\Phi_{s_1} + \Phi_r)\,dx\,dy = \Psi_{s_1} + n_1\,\Phi_r = S_1 + n_1\,\Phi_r,$$

$$\overline{\Psi_{s_2}} = \frac{n_2}{F_2}\iint_{F_2}(\Phi_{s_2} + \Phi_r)\,dx\,dy = \Psi_{s_2} + n_2\,\Phi_r = -\frac{n_1}{n_2} S_2 + n_2\,\Phi_r.$$

Hieraus erhält man:

$$\overline{\Psi_{s_1}} - \frac{n_1}{n_2}\overline{\Psi_{s_2}} = \Psi_{s_1} - \frac{n_1}{n_2}\Psi_{s_2} = S_1 + \frac{n_1^2}{n_2^2} S_2 = S_I, \qquad q \cdot e \cdot d \;.\;.\;. \quad (50).$$

Die letzte Zeile liefert uns nunmehr auch für die Gesamtstreuinduktivität $S_I = \frac{n_1^2}{n_2^2} S_{II}$ eine unmittelbare magnetische Definition. Danach läßt sich nämlich S_I aus der Verkettung von Φ_{s_1} mit n_1 und aus der mit $-\frac{n_1}{n_2}$ reduzierten Verkettung von Φ_{s_2} mit n_2 linear zusammensetzen, wobei Φ_{s_1} und Φ_{s_2} von ein und derselben, im übrigen aber beliebigen Flußlinie aus gezählt werden.

Schließlich ist für uns von besonderer Wichtigkeit, daß über die in ψ_α auftretende unbestimmte Konstante bei beiden Berechnungsarten der Streuung nach Gutdünken verfügt werden darf.

[1]) Hierfür bildeten das weiter unten in Abb. 24 konstruierte Fensterfeld und allgemein, soweit es ohne größere nummerische Rechnungen möglich war, die in I 4 und 5 abgeleiteten Flußfunktionen eine Grundlage.

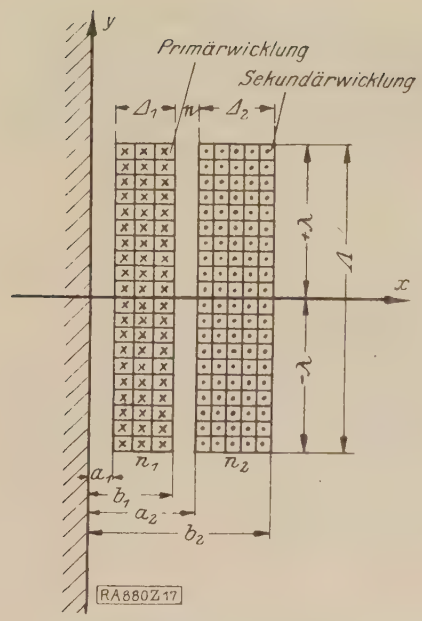

Abb. 17.

Mit den hier entwickelten Methoden werden im Folgenden die Streuinduktivitäten der unter I 4 und 5 behandelten Modelle ermittelt.

3. Streuung bei ebener Wand. Für den Anteil des Außengebietes eines Transformators an den Streuverkettungen legen wir das Magnetfeld bei ebener Wand aus I **4** zugrunde. Lage und Abmessungen von Primär- und Sekundärwicklung werden alsdann von Abb. 17 veranschaulicht.

Der Zerlegung einer Flußfunktion ψ in ψ^I und ψ^{II} [siehe Gl. (18) und die Abbildungen 10a, b, c] entspricht eine gleichartige der Elemente $l_{\alpha\beta}$ (48) und der Streuinduktivitäten s mit denselben oberen Indizes I und II; d. h.

$$s = s^I + s^{II} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51).$$

Alsdann folgt allgemein:

$$s_1 = l_{11} - \frac{n_1}{n_2} l_{12}\,; \qquad s_2 = l_{22} - \frac{n_2}{n_1} l_{21} \quad (52).$$

Bei Berechnung der dem Teilfeld (Abb. 11b) entsprechenden Streuinduktivitäten s^I bildet man z. B. mit Hilfe von (19) und (48):

$$l_{11}{}^I = \frac{n_1}{F_1}\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{-\lambda}^{+\lambda} dy\, \psi_1{}^I = -\,0{,}4\,\pi_1\, j_1\, \frac{\Delta_1{}^2}{6}\,; \qquad \text{usw.}$$

und es folgt auf Grund von (47) und (52):

$$s_1{}^I = 0{,}4\,\pi\,\frac{n_1{}^2}{\Delta}\left[e + \frac{\Delta_1}{3} + \frac{\Delta_2}{2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (53\,a). \qquad s_I{}^I = -\,0{,}4\,\pi\,\frac{n_2{}^2}{\Delta}\,\frac{\Delta_2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (53\,b),$$

d. h. nach (42):

$$s_I{}^I = \frac{n_1{}^2}{n_2{}^2}\, s_{II}{}^I = s_1{}^I + \frac{n_1{}^2}{n_2{}^2}\, s_2{}^I = 0{,}4\,\pi\,\frac{n_1{}^2}{\Delta}\left[e + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53\,c).$$

Die Berechnung der aus dem Teilfeld Abb. 10c herzuleitenden Streuinduktivitäten s^{II} reduziert sich in der Hauptsache auf die allgemeine von $l^{II}_{\alpha\beta}$. Hierfür bildet man nach (48):

$$l^{II}_{\alpha\beta} = \frac{n_\beta}{F_\beta}\int_{a_\beta}^{b_\beta} dx \int_{-\lambda}^{+\lambda} dy\, \psi^{II}_\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

setzt für ψ^{II}_α den Wert aus (20) ein und erhält so Integrale folgender Art [1]):

$$\int_{a_\beta}^{b_\beta} dx \int_{-\lambda}^{+\lambda} dy \left[\lambda \pm i\,(z \pm a)\right]^2 \log\left[\lambda \pm i\,(z \pm a)\right]$$

$$= \pm\,\frac{i}{12}\left[\left(\lambda \pm i\,(z \pm a)\right)^4 \left\{\log\left(\lambda \pm i\,(z \pm a)\right) - {}^1\!/_2\right\}\right]_{-\lambda}^{+\lambda}\Bigg|_{a_\beta}^{b_\beta}$$

Zu ihrer Zusammenfassung sei die gerade Funktion:

$$G(v) = G(-v) = (v^4 - 6\,v^2 + 1)\log(1 + v^2) + v^4 \log\frac{1}{v^2} - 8\,v\,(1 - v^2)\,\operatorname{arctg} v \quad (55)$$

definiert, deren Werte aus der beigefügten Tabelle entnommen werden können. Dort stehen neben $G(v)$ in derselben Zeile zur Interpolation die ersten Differenzen $\Delta\, G(v)$.

Diese Hilfsmittel erlauben uns, das Resultat der Integration in (54) nach Einführung von (20) auf folgende Form zu bringen:

$$l^{II}_{\alpha\beta} = -\,j\alpha\,\frac{n_\beta}{F_\beta}\,\frac{0{,}1}{12}\,(2\,\lambda)^4 \left\{G\left(\frac{b_\beta - b_\alpha}{2\,\lambda}\right) - G\left(\frac{a_\beta - b_\alpha}{2\,\lambda}\right) - G\left(\frac{a_\beta - b_\alpha}{2\,\lambda}\right) - G\left(\frac{a_\beta - a_\alpha}{2\,\lambda}\right)\right.$$
$$\left. - G\left(\frac{b_\beta - b_\alpha}{2\,\lambda}\right) + G\left(\frac{a_\beta - b_\alpha}{2\,\lambda}\right) + G\left(\frac{b_\beta - a_\alpha}{2\,\lambda}\right) - G\left(\frac{a_\beta - a_\alpha}{2\,\lambda}\right)\right\}.$$

[1]) Analoge Formeln findet man für ein ähnliches Modell wie Abb. 17 bei J. Biermann, Ueberströme in Hochspannungsanlagen, S. 340 f.

v	$G(v)$	$\Delta G(v)$	v	$G(v)$	$\Delta G(v)$
0,00	— 0,00000	— 0,00070	0,51	— 1,44657	— 0,04467
0,01	— 0,00070	— 0,00210	0,52	— 1,49124	— 0,04467
0,02	— 0,00280	— 0,00349	0,53	— 1,53591	— 0,04460
0,03	— 0,00629	— 0,00488	0,54	— 1,58051	— 0,04451
0,04	— 0,01117	— 0,00626	0,55	— 1,62502	— 0,04437
0,05	— 0,01744	— 0,00764	0,56	— 1,66939	— 0,04419
0,06	— 0,02507	— 0,00900	0,57	— 1,71358	— 0,04396
0,07	— 0,03407	— 0,01035	0,58	— 1,75754	— 0,04369
0,08	— 0,04442	— 0,01169	0,59	— 1,80123	— 0,04337
0,09	— 0,05611	— 0,01301	0,60	— 1,84460	— 0,04301
0.10	— 0,06912	— 0,01432	0,61	— 1,88761	— 0,04260
0,11	— 0,08344	— 0,01561	0,62	— 1,93020	— 0,04215
0,12	— 0,09906	— 0,01689	0,63	— 1,97236	— 0,04165
0,13	— 0,11595	— 0,01814	0,64	— 2,01400	— 0,04111
0,14	— 0,13409	— 0,01938	0,65	— 2,05511	— 0,04052
0,15	— 0,15347	— 0,02060	0,66	— 2,09563	— 0,03987
0,16	— 0,17407	— 0,02179	0,67	— 2,13550	— 0,03920
0,17	— 0,19586	— 0,02297	0,68	— 2,17470	— 0,03846
0,18	— 0,21882	— 0,02411	0,69	— 2,21315	— 0,03768
0,19	— 0,24294	— 0,02524	0,70	— 2,25084	— 0,03686
0,20	— 0,26818	— 0,02634	0,71	— 2,28770	— 0,03597
0,21	— 0,29452	— 0,02742	0,72	— 2,32367	— 0,03505
0,22	— 0,32194	— 0,02847	0,73	— 2,35872	— 0,03407
0,23	— 0,35040	— 0,02949	0,74	— 2,39279	— 0,03308
0,24	— 0,37989	— 0,03049	0,75	— 2,42587	— 0,03199
0,25	— 0,41038	— 0,03145	0,76	— 2,45786	— 0,03087
0,26	— 0,44183	— 0,03239	0,77	— 2,48873	— 0,02969
0,27	— 0,47421	— 0,03330	0,78	— 2,51841	— 0,02849
0,28	— 0,50751	— 0,03417	0,79	— 2,54691	— 0,02721
0,29	— 0,54168	— 0,03502	0,80	— 2,57411	— 0,02588
0,30	— 0,57670	— 0,03584	0,81	— 2,59999	— 0,02454
0,31	— 0,61253	— 0,03661	0,82	— 2,62452	— 0,02310
0,32	— 0,64914	— 0,03736	0,83	— 2,64762	— 0.02164
0,33	— 0,68651	— 0,03808	0,84	— 2,66926	— 0,02008
0,34	— 0,72458	— 0,03876	0,85	— 2,68934	— 0,01853
0,35	— 0,76335	— 0,03941	0,86	— 2,70787	— 0,01689
0,36	— 0,80275	— 0,04002	0,87	— 2,72476	— 0,01524
0,37	— 0,84278	— 0,04060	0,88	— 2,74001	— 0,01347
0,38	— 0,88337	— 0,04114	0,89	— 2,75347	— 0,01171
0,39	— 0,92451	— 0 04164	0,90	— 2,76518	— 0,00988
0,40	— 0,96615	— 0,04211	0,91	— 2,77506	— 0,00798
0,41	— 1,00826	— 0,04254	0,92	— 2,78304	— 0,00606
0,42	— 1,05080	— 0,04293	0,93	— 2,78910	— 0,00407
0,43	— 1,09373	— 0,04329	0,94	— 2,79317	— 0,00210
0,44	— 1,13701	— 0,04360	0,95	— 2,79518	+ 0,00015
0,45	— 1,18061	— 0,04388	0,96	— 2,79503	+ 0,00221
0,46	— 1 22448	— 0,04411	0,97	— 2,79281	+ 0,00444
0,47	— 1,26859	— 0,04430	0,98	— 2,78838	+ 0,00675
0,48	— 1,31289	— 0,04445	0,99	— 2,78162	+ 0,00904
0,49	— 1,35734	— 0,04459	1,00	— 2,77259	
0,50	— 1,40193	— 0,04464			

Auf Grund von (47), (52) und (53) erhält man hieraus z. B.:

$$
\left.\begin{aligned}
s_1 &= s_1^{I} + s_1^{II} = s_1^{I} + l_{11}^{II} - \frac{n_1}{n_2}\, l_{12}^{II} = 0{,}4\,\pi\,\frac{n_1^2}{\Delta}\left[e + \frac{\Delta_1}{3} + \frac{\Delta_2}{2}\right] \\
&+ n_1^2\,\Delta^2\,\frac{0{,}1}{12}\left\{\frac{1}{\Delta_1^2}\left[2\,G\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right) + G\left(\frac{2\,b_1}{\Delta}\right) + G\left(\frac{2\,a_1}{\Delta}\right) - 2\,G\left(\frac{a_1+b_1}{\Delta}\right)\right]\right. \\
&+ \frac{1}{\Delta_1\cdot\Delta_2}\left[G\left(\frac{b_2-b_1}{\Delta}\right) - G\left(\frac{a_2-b_1}{\Delta}\right) - G\left(\frac{b_2-a_1}{\Delta}\right) + G\left(\frac{a_2+a_1}{\Delta}\right) - G\left(\frac{b_2+b_1}{\Delta}\right)\right. \\
&\left.\left. + G\left(\frac{a_2+b_1}{\Delta}\right) + G\left(\frac{b_2+a_1}{\Delta}\right) - G\left(\frac{a_2+a_1}{\Delta}\right)\right]\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (56\,a),
$$

und analoge Formen für:

$$s_2 = s_2{}^I + s_2{}^{II} = s_2{}^I + l_{2_2}{}^{II} - \frac{n_2}{n_1} l_{21}{}^{II} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56\text{b}),$$

$$s_I = \frac{n_1{}^2}{n_2{}^2} s_{II} = s_1 + \frac{n_1{}^2}{n_2{}^2} s_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56\text{c}).$$

Die hier errechneten Streuinduktivitäten s sind aus homogenen Funktionen 0-ten Grades des Transformatorabmessungen zusammengesetzt und außerdem dimensionslose Größen. Sie hängen also nur von dem Verhältnis jener Maße untereinander, doch nicht von ihrer absoluten Größe ab.

Weiterhin ist der Quotient der wirklichen Gesamtstreuinduktivität s_I und der entsprechenden bei unendlicher langer Belegung $s_I{}^I$ mit der von Kapp[1]) eingeführten Zahl $\varkappa$, dem sogenannten »Kappschen Faktor«, identisch, d. h. also:

$$\varkappa = \frac{s_I}{s_I{}^I} = \frac{s_{II}}{s_{II}{}^I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57).$$

$\varkappa$ erscheint bei Kapp als Erfahrungsfaktor, während er für die von uns hier behandelten Modelle streng berechnet werden kann. Außerdem ist bei Kapp[1]) nur der Wert für $s_I{}^I$ (53 c) wiederzufinden, während er für $s_1{}^I$, s_1 und $s_2{}^I$, s_2 infolge einer willkürlichen Zerlegung des Streuflusses, Formeln erhält, welche von den aus (53 a und b) und (58 a und b) erheblich abweichen. Kapp legt nämlich die Grenzlinie G (Abb. 16) für das Feld bei ebener Wand in die Mitte zwischen beide Belegungen. Nach unseren Resultaten dagegen bildet diese Kurve, wie man mit Hilfe ihrer auf Seite 21 gegebenen Definition leicht einsehen kann, bei unendlich langer Stromfläche den Außenrand der äußeren Belegung und wird sie deshalb bei endlicher Wicklungslänge voraussichtlich durchsetzen.

4. Innenstreuung beim rechteckigen Schacht. Zur Berechnung der Streuung im Fenster kennen wir aus I; 5 nur Magnetfelder mit verschwindender Belegungssumme, d. h. also für Gegenschaltung von Primär- und Sekundärwicklung. In diesem Falle lassen sich nach II 2 nur die Gesamtstreuinduktivitäten s_I und s_{II} ermitteln, da die Lage der Grenzlinie G unbekannt ist. Hierfür sind die Streuflüsse Φs mit der Flußfunktion $\psi(x, y)$ aus I 5 identisch. Wir behandeln die beiden Fälle von zwei und vier getrennten Strombelegungen.

Bei zwei Spulen, Abb. 15 a, zerlegen wir wieder die Streuinduktivitäten s und die Elemente $l_{\alpha\beta}$ wie die zugehörigen Magnetfelder [Abb. 15 a, b, c und Gl. (26)] und verwenden dieselben oberen Indices I und II (51).

Alsdann folgt mit Hilfe von (27), (46), (47) und (50):

$$s_I{}^I = \frac{n_1{}^2}{n_2{}^2} s_{II}{}^I = \frac{n_1}{F_1} \int_{b_1}^{a_1} dx \int_{-\lambda}^{+\lambda} dy\, \psi^I - \frac{n_1}{n_2} \frac{n_2}{F_2} \int_{b_2}^{a_2} dx \int_{-\lambda}^{+\lambda} dy\, \psi^I = \frac{n_1{}^2}{\Lambda}\, 0{,}4\, \pi \left[\varepsilon + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3} \right] \quad (58).$$

Hiernach sind $s_I{}^I$ und $s_{II}{}^I$ von der horizontalen Entfernung zwischen Strombelegung und Eisenrand unabhängig. Analog schließt man auf Grund von (28), (46), (48) und (50):

$$\left.\begin{aligned} s_I{}^{II} = \frac{n_1}{F_1} \left\{ \int_{b_1}^{a_1} dx \int_{-\lambda}^{+\lambda} dy \left(\psi_1{}^{II} - \frac{n_1}{n_2} \psi_2{}^{II} \right) \right\} - \frac{n_1}{n_2} \frac{n_2}{F_2} \int_{b_2}^{a_2} dx \int_{-\lambda}^{+\lambda} dy \left(\psi_1{}^{II} - \frac{n_1}{n_2} \psi_2{}^{II} \right) \\ = l_{1_1}{}^{II} - \frac{n_1}{n_2} l_{21}{}^{II} - \frac{n_1}{n_2} l_{12}{}^{II} + \frac{n_1{}^2}{n_2{}^2} l_{22}{}^{II} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (59).$$

Hierfür bilden wir von (31) und (48) ausgehend unter sinngemäßer Vernachlässigung aller höheren negativen Potenzen in t und λ, welche numerisch nur einen sehr kleinen Beitrag (im allgemeinen weniger als 1 vH.) zum Resultate beisteuern:

$$\left.\begin{aligned} l_{\alpha\beta}{}^{II} = \frac{n_\beta}{F_\beta} \left(\frac{D}{\pi} \right)^4 0{,}8\, j_2 \Bigg\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^5} \left[e^{-2(2m-1)\pi/D(t-\lambda)} - 1 \right] \cdot \Bigg[\Big(\cos(2m-1) \frac{\pi}{D} b_\beta \\ - \cos(2m-1) \frac{\pi}{D} a_\beta \Big) \Big(\cos(2m-1) \frac{\pi}{D} b_\alpha - \cos(2m-1) \frac{\pi}{D} a_\alpha \Big) \Bigg] \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m^5} \left[e^{-2m\pi/D(t-\lambda)} - 1 \right] \cdot \Bigg[\Big(\sin 2m \frac{\pi}{D} b_\beta - \sin 2m \frac{\pi}{D} a_\beta \Big) \Big(\sin 2m \frac{\pi}{D} b_\alpha \\ - \sin 2m \frac{\pi}{D} a_\alpha \Big) \Bigg] \Bigg\} \end{aligned}\right\} \quad (60).$$

[1]) Siehe Kapp, »Transformatoren für Wechselstrom und Drehstrom«, S. 127.

Auf Grund von (47), (51), (58) bis (60) ergibt sich jetzt das Resultat:

$$\left.\begin{aligned} s_I &= \frac{n_1^2}{n_2^2}\, s_{II} = s_I{}^I + s_I{}^{II} = 0{,}4\,\pi \frac{n_1^2}{\Lambda}\left[e + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3}\right] \\ &+ 0{,}8\; n_1^2 \left(\frac{D}{\pi}\right)^4 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^5}\left[e^{-(2m-1)\pi/D\,(T-\Lambda)} - 1\right] \cdot \right. \\ &\cdot \left(\frac{\cos(2m-1)\,\pi/D\,b_1 - \cos(2m-1)\,\pi/D\,a_1}{F_1} - \frac{\cos(2m-1)\,\pi/D\,b_2 - \cos(2m-1)\,\pi/D\,a_2}{F_2} \right)^2 \Bigg\} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m^5}\left[e^{-2m\,\pi/D\,(T-\Lambda)} - 1\right] \left(\frac{\sin 2m\,\pi/D\,b_1 - \sin 2m\,\pi/D\,a_1}{F_1} \right. \\ &\left. - \frac{\sin 2m\,\pi/D\,b_2 - \sin 2m\,\pi/D\,a_2}{F_2} \right)^2 \Bigg\} \end{aligned}\right\} \quad (61).$$

Hierin stimmt das erste Glied $s_I{}^I$, das die Streuverkettungen Abb. 15b mit den Wicklungen Abb. 15a darstellt, mit dem entsprechenden aus dem Felde bei ebener Wand hergeleiteten Gliede (53c), d. h. mit der Formel von **Kapp** überein.

Deshalb hat der **Kappsche** Faktor $\varkappa$ hier die gleiche Form wie in (57). Setzen wir weiterhin in (61) $T = \Lambda$, d. h. verlängern wir die Wicklungen (Abb. 15a) bis zum Eisenrand, so wird $s^I = s^I{}_I$, also $\varkappa = 1$. Bei endlichem Abstande $\frac{T-\Lambda}{2}$ ist dagegen auch das zweite Glied $s^I{}_{II}$ von Bedeutung, so daß dann stets $\varkappa < 1$ wird.

Im Falle von vier Spulen mit den Windungszahlen N_1, N_2, N_3, N_4 muß man beachten, daß der Wicklungssinn jeder Spule maßgebend für das Vorzeichen der Strombelegung und der dort induzierten elektromotorischen Kraft ist. So sind sie z. B. in Abb. 18 paarweise hintereinander gleich-geschaltet.

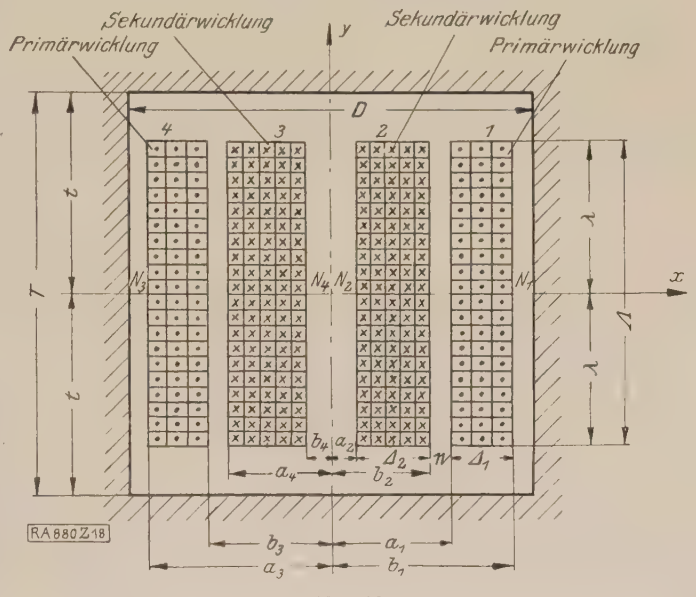

Abb. 18.

Vertauscht man dort das Vorzeichen der Belegungen (3) und (4), so enthält man die entsprechende Gegenschaltung. n_1 und n_2 seien nach wie vor die Gesamtwindungszahlen von Primär- und Sekundärwicklung und außerdem:

$$N_1 = N_3 = \frac{n_1}{2}, \qquad N_2 = N_4 = \frac{n_2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62).$$

Zwischen den Lagenkoordinaten der Strombelegungen bestehe die Symmetrie:

$$a_1 = -b_3\,, \qquad b_1 = -a_3\,, \qquad a_2 = -b_4\,, \qquad b_2 = -a_4 \quad . \quad . \quad . \quad (63).$$

Die resultierende Flußfunktion aller vier Belegungen sei $\chi(x, y)$, und es wird die Gesamtstreuinduktivität wie in (51) zerlegt. So folgt für Gleich- wie für Gegenschaltung ebenso wie in (58) unter Berücksichtigung von (62):

$$s_I{}^I = \frac{n_1^2}{n_2^2}\, s_{II}{}^I = 0{,}2\,\pi \frac{n_1^2}{\Lambda}\left[e + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64).$$

Bei der Ermittlung von $s_I{}^{II}$ legen wir sinngemäß (28) zugrunde und bilden so bei Gleichschaltung von je zwei Spulen (Abb. 18) ihre resultierende Flußfunktion:

$$\chi^{II} = (\psi_1{}^{II} + \psi_3{}^{II}) - \frac{n_1}{n_2}(\psi_2{}^{II} + \psi_4{}^{II})\,.$$

In gleicher Weise wie in (59) folgt hiermit:

$$s_1^{II} = \frac{n_1^2}{n_2^2} s_{II}^{I} = l_{11}^{II} + l_{31}^{II} - \frac{n_1}{n_2} l_{21}^{II} - \frac{n_1}{n_2} l_{41}^{II} + l_{13}^{II} + l_{33}^{II} - \frac{n_1}{n_2} l_{23}^{II} - \frac{n_1}{n_2} l_{43}^{II}$$
$$- \frac{n_1}{n_2} l_{12}^{II} - \frac{n_1}{n_2} l_{32}^{II} + \frac{n_1^2}{n_2^2} l_{22}^{II} + \frac{n_1^2}{n_2^2} l_{42}^{II} - \frac{n_1}{n_2} l_{14}^{II} - \frac{n_1}{n_2} l_{34}^{II}$$
$$+ \frac{n_1^2}{n_2^2} l_{24}^{II} + \frac{n_1^2}{n_2^2} l_{44}^{II} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65),$$

und ebenso erhält man auf Grund von (47), (51), (60), (62) bis (65) das Resultat:

$$s_I = \frac{n_1^2}{n_2^2} s_{II} = 0{,}2\,\pi \frac{n_1^2}{\Delta} \left(\mathfrak{e} + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{8} \right) + 0{,}8 \left(\frac{D}{\pi} \right)^4 n_1^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\,m^5} \left[e^{-2m\,\pi/D^3\,(T-\Lambda)} - 1 \right] \cdot$$
$$\cdot \left[\frac{\sin 2\,m\,\pi/D\,b_1 - \sin 2\,m\,\pi/D\,a_1}{F_1} - \frac{\sin 2\,m\,\pi/D\,b_2 - \sin 2\,m\,\pi/D\,a_2}{F_2} \right]^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66).$$

Von diesem Ergebnis unterscheidet sich s_I bei Gegenschaltung dadurch, daß $2m$ mit $2m - 1$ und sinus mit cosinus vertauscht wird. Im übrigen läßt sich hier ein $\varkappa$ ebenso wie in (57) definieren. Wie man schließlich noch aus (61) und (66) ersieht, hängen wie bei ebener Wand so auch im Fenster die Streuinduktivitäten s nur von dem Verhältnis der einzelnen Abmessungen untereinander und nicht von ihrer absoluten Größe ab.

III. Spezielle Ausführungen.

Als Ausführungsbeispiele für die Magnetfelder eines konzentrischen Kreisringes sollen die beiden Felder von ein und zwei viertelkreisförmigen Strombelegungen, d. h. mit endlicher und mit verschwindender Zirkulation, dienen (Abb. 19 und 20).

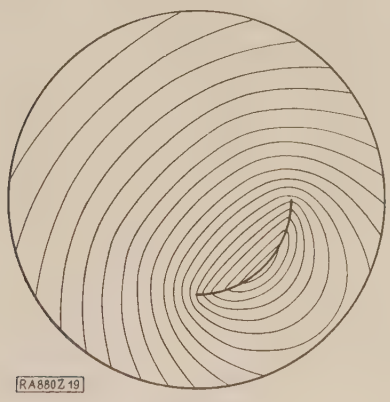

Abb. 19.

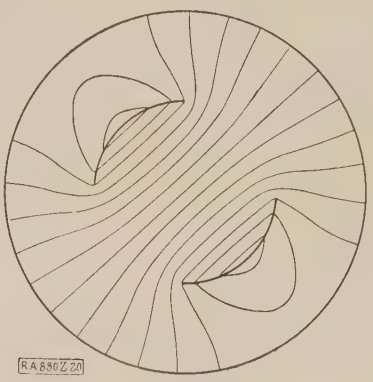

Abb. 20.

Die Felder des ersten laufen demnach schräg in den Eisenrand ein, während das zweite Feld, dessen beide Wirbellinien das entgegengesetzte Vorzeichen tragen, nach I **2** senkrecht auf der Eisenoberfläche steht. R_1 ist der Radius des Innenkreises, $\varrho_1 = {}^1/_2\,R_1$ der der Wirbellinien. J_w bezeichne die Strombelegung pro Winkeleinheit. Nach Gl. (4 a), in welche an Stelle von ϱ_1 eine komplexe Belegungsvariable ζ eingesetzt wird, errechnet man hier die Radial- und Tangentialkomponenten der Feldstärke $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}^{(r)}$ und $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}^{(\vartheta)}$ in derselben Weise wie in I **4, 5**, bildet also im Falle Abb. 19:

$$\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}^{(r)} - i\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}^{(\vartheta)} = 0{,}2\,\frac{J_w}{r} \Big\{ \log\left(z - i\,\frac{1}{2}\,R_1\right) - \log\left(z - \frac{1}{2}\,R_1\right) + \log\left(z - i\,2\,R_1\right)$$
$$- \log\left(z - 2\,R_1\right) - i\,\pi \Big\}$$

und erhält eine analoge Formel im Falle Abb. 20. Es folgen dann zugehörigen Flußfunktionen $\mathfrak{d}\,\psi\,(r, \vartheta)$ als Randintegrale von $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}^{(r)}$ über die Peripherien der konzentrischen Kreise $r = \text{konst.}$ und werden durch ein gleichartiges Integral von $\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}^{(\vartheta)}$ über den Strahl $\vartheta = \pi/4$ miteinander in Verbindung gebracht. Man setzt also:

$$\mathfrak{d}\,\psi\,(r, \vartheta = \pi/4) = -\int_0^r (\mathfrak{d}\,\mathfrak{H}^{(\vartheta)})\,dr\,; \qquad \vartheta = \pi/4$$

und hiernach:

$$\mathfrak{d}\,\psi\,(r,\vartheta) = \int_{\pi/4}^{\vartheta} \mathfrak{d}\,\mathfrak{H}^{(r)} \cdot r\,d\,\vartheta + \mathfrak{d}\,\psi\,(r, \vartheta = \pi/4)\,.$$

Diese Kurvenschar wurde mit Hilfe des Integraphen aufgezeichnet. Ihre Schnittpunkte mit einer Geraden $\mathfrak{d}\,\psi = \text{konst.}$ liefern alsdann unmittelbar die Koordinaten dieser Flußlinie. Auf diesem Wege sind die Feldbilder $\mathfrak{d}\,\psi = \text{konst.}$ in Abb. 19 und 20 entstanden.

Bei der Darstellung von Magnetfeldern der in I **4** und **5** behandelten Modelle sind die speziellen Maße einem Drehstromtransformator des Elektrotechnischen Instituts der technischen Hochschule Breslau entnommen, und zwar ist für das Innengebiet:

$$\left.\begin{array}{llll} D = 12{,}0\text{ cm}, & T = 30{,}0\text{ cm}, & \Delta = 23{,}4\text{ cm} & \\ \Delta_1 = 1{,}4\text{ »}, & \Delta_2 = 1{,}6\text{ »}, & e = 0{,}5\text{ »} & \\ a_1 = 4{,}2\text{ »}, & b_1 = 5{,}6\text{ »}, & a_2 = 2{,}1\text{ »}, & b_2 = 3{,}7\text{ cm} \end{array}\right\} \quad (68).$$

Im Außengebiet bzw. für die ebene Wand gilt:

$$\left.\begin{array}{llll} \Delta = 23{,}4\text{ cm}, & \Delta_1 = 1{,}4\text{ cm}, & \Delta_2 = 1{,}6\text{ cm}, & e = 0{,}5\text{ cm} \\ a_1 = 0{,}5\text{ »}, & b_1 = 1{,}9\text{ »}, & a_2 = 2{,}4\text{ »}, & b_2 = 4{,}0\text{ »} \end{array}\right\} \quad (69).$$

Δ bedeutet hier einen mittleren Wert, da die Längen von Primär- und Sekundärwicklung in Wirklichkeit um 3,7 vH voneinander abweichen. Im übrigen enthält jede Primärspule 104 Windungen, jede Sekundärspule 240 Windungen.

Die graphische Darstellung der Magnetfelder für das Modell einer ebenen Wand (Abb. 17), wofür die Gl. (18) bis (20) den Ausgangspunkt bilden, machte so umfangreiche numerische Rechnungen notwendig, daß sie im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr bewältigt werden konnten.

Dagegen wurde für das Fenster, und zwar für zwei Strombelegungen, eine solche Ermittlung durchgeführt. Es ist bemerkenswert, daß diese Aufgabe für die an sich kompliziertere Anordnung des Fensters leichter zu bewältigen war. Das hängt mit den Periodizitätseigenschaften des Feldes zusammen. Der Berechnung und Konstruktion dieses Flußbildes (Abb. 21) sind die Gl. (27), (31) bis (34) und (68) zugrunde gelegt.

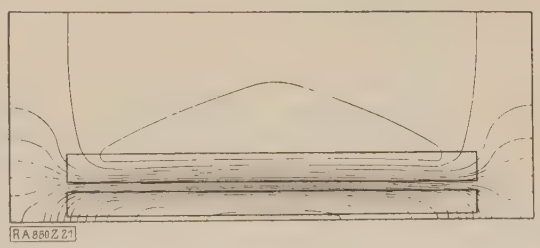

Abb. 21.

Für den gleichen Drehstromtransformator wird auch die Streuung berechnet, und zwar sowohl für zwei auf einem Schenkel sitzende als auch für vier auf zwei benachbarte Schenkel verteilte Spulen.

Für das Außengebiet bzw. für die ebene Wand liefern hier die Gl. (53), (56), (57), und (69):

$$\left.\begin{array}{ll} s_1^{\,I} = 10{,}24 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Henry}}{\text{cm}}, & s_1 = 8{,}14 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Henry}}{\text{cm}} \\ s_2^{\,I} = -\,8{,}34 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Henry}}{\text{cm}}, & s_2 = -\,0{,}54 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Henry}}{\text{cm}} \\ s_I^{\,I} = \frac{n_1^{\,2}}{n_2^{\,2}}\,s_{II}^{\,I} = 8{,}68\,\frac{\text{Henry}}{\text{cm}}, & s_I = \frac{n_1^{\,2}}{n_2^{\,2}}\,s_{II} = 8{,}04 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Henry}}{\text{cm}} \\ \multicolumn{2}{c}{\varkappa = 0{,}926} \end{array}\right\} \quad (70).$$

Im Fenster erhält man zunächst im Falle zweier Strombelegungen aus den Gl. (57), (58), (61) und (68):

$$s_I^{\,I} = \frac{n_1^{\,2}}{n_2^{\,2}}\,s_{II}^{\,I} = 8{,}68 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Henry}}{\text{cm}}, \quad s_I = \frac{n_1^{\,2}}{n_2^{\,2}}\,s_{II} = 8{,}12 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Henry}}{\text{cm}}, \quad \varkappa = \frac{s_I}{s_I^{\,I}} = 0{,}936 \quad (71).$$

Für vier Strombelegungen folgt sodann bei Gleichschaltung von je zwei Spulen aus den Gl. (57), (64), (66) und (68):

$$s_I^{\,I} = \frac{n_1^{\,2}}{n_2^{\,2}}\,s_{II}^{\,I} = 17{,}36 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Henry}}{\text{cm}}, \quad s_I = \frac{n_1^{\,2}}{n_2^{\,2}}\,s_{II} = 16{,}26 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Henry}}{\text{cm}}, \quad \varkappa = \frac{s_I}{s_I^{\,I}} = 0{,}939 \quad (72).$$

Bei Gegenschaltung:

$$s_I^{\,I} = \frac{n_1^{\,2}}{n_2^{\,2}}\,s_{II}^{\,I} = 17{,}36 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Henry}}{\text{cm}}, \quad s_I = \frac{n_1^{\,2}}{n_2^{\,2}}\,s_{II} = 16{,}20 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Henry}}{\text{cm}}, \quad \varkappa = \frac{s_I}{s_I^{\,I}} = 0{,}934 \quad (73).$$

Nach (70) bis (73) weichen hier die Gesamtstreuinduktivitäten s_I und s_{II} für das Fenster von den entsprechenden für das Außengebiet abgeleiteten Größen um weniger als 1,5 vH ab. Es sei deshalb in den weiteren Rechnungen für das ganze Tranzformatorgebiet als mittlerer Wert der wirklichen Gesamtstreuinduktivität pro Längeneinheit

im Falle zweier Spulen: $s_I = \frac{n_1^2}{n_2^2} s_{II} = 8{,}08 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Henry}}{\text{cm}}$ . . . . . (74),

» » von vier Spulen: $s_I = \frac{n_1^2}{n_2^2} s_{II} = 16{,}18 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Henry}}{\text{cm}}$ . . . . . (76)

eingesetzt.

Nunmehr wird ein mittlerer Spulenumfang U mit der Maßgabe eingeführt, daß die gesamte Streuinduktivität näherungsweise aus der Gleichung:

$$S_I = U s_I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

berechnet werden kann. Als wahrscheinlichsten Wert von U liefert der mittlere Umfang von Primär- und Sekundärwicklung:

$$U = 48 \text{ cm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77);$$

aus (74), (75) und (77) folgen alsdann die Näherungswerte:

im Falle zweier Spulen: $S_I = \frac{n_1^2}{n_2^2} S_{II} = 3{,}88 \cdot 10^{-4}$ Henry . . . . . (78),

» » von vier Spulen: $S_I = \frac{n_1^2}{n_2^2} S_{II} = 7{,}77 \cdot 10^{-4}$ » . . . . . (79).

Die Einzelinduktivitäten S_1 und S_2 konnten hier nicht abgeschätzt werden, da wir die entsprechenden Größen s_1 und s_2 nur für das Außengebiet, nicht aber für das Fenster berechnet haben.

Zur Kontrolle der vorstehenden Resultate ergab eine Kurzschlußmessung im Falle zweier Spulen:

$$S_I \text{ (gemessen)} = 4{,}35 \cdot 10^{-4} \text{ Henry}, \qquad [S_I \text{ (berechnet)} = 3{,}88 \cdot 10^{-4} \text{ Henry}],$$

also einen Unterschied von etwa 10 vH gegenüber der Rechnung.

Während der Drucklegung dieser Arbeit hatte ich Gelegenheit, in gleicher Weise wie in dem eben ausgeführten Beispiel die Streuinduktivität bei Zylinderwicklung auch für einige Transformatoren der AEG zu berechnen und mit im Versuchslaboratorium der AEG-Transformatorenfabrik angestellten Kurzschlußmessungen zu vergleichen. Die Transformatoren waren einphasig. Jeder ihrer beiden Schenkel trug zwei Wicklungen, welche hoch- und niedervoltseitig gleichgeschaltet waren. Die Resultate lauten wie folgt:

Perioden-zahl	Leistung	Außengebiet		Fenster		U	S_{II} errechnet	S_{II} gemessen	Abweichung
		s_{II} in $\frac{\text{Henry}}{\text{cm}}$	%	s_{II} in $\frac{\text{Henry}}{\text{cm}}$	%				
	in kVA					in cm	in Henry	in Henry	in vH
50	9167	$7{,}67 \cdot 10^{-4}$	0,905	$8{,}03 \cdot 10^{-4}$	0,940	234	0,1830	0,1935	— 5,70
50	9167	$8{,}82 \cdot 10^{-4}$	0,862	$9{,}63 \cdot 10^{-4}$	0,935	239	0,220	0,226	— 2,70
$16^2/_3$	3000	$26{,}6 \cdot 10^{-4}$	0,823	$31{,}1 \cdot 10^{-4}$	0,957	204	0,590	0,660	— 11,85

Bemerkenswert bei sämtlich untersuchten Konstruktionen ist zunächst, daß der Anteil des Außengebietes an der Gesamtstreuinduktivität stets geringer wird als der des Fensters. Das gilt einmal für die beiden Streuinduktivitäten s_I bzw. s_{II}. Darüber hinaus liegt aber zum zweiten auch die als Mittelwert aus ihnen gebildete Gesamtstreuinduktivität des ganzen Transformatorgebietes S_I bzw. S_{II} mehrere Prozent unter den Meßergebnissen.

Dieser letztgenannte Unterschied ist in erster Linie dadurch zu erklären, daß wir den mittleren Spulenumfang U in (77) zu klein gewählt haben. Jene Größe U vermittelt aber gerade den Uebergang von der Streuinduktivität pro Längeneinheit s_I, d. h. allgemein vom ebenen Problem zur Streuinduktivität S_I des gesamten Transformatorgebietes, also zu einer räumlichen Aufgabe. Es zeigt sich, daß letztere durch die obere Wahl von U nur unvollkommen gelöst wird, daß es sich mithin empfiehlt, diese Abschätzung durch exakte Untersuchungen an einem geeigneten räumlichen Modell zu ersetzen. Ein solches entsteht z. B., wenn wir einen Transformatorschenkel in einen unendlich langen Kreiszylinder entarten lassen und die übrigen Schenkel zunächst vernachlässigen. Die Rechnungsmethoden,

auf welche sich derartige Untersuchungen stützen müssen, werden von den hier entwickelten vollkommen verschieden sein. Deshalb soll dieses Problem einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

Schließlich ist es für mich eine angenehme Pflicht, Hrn. Prof. Noether, welcher diese Arbeit angeregt und mich bei den einzelnen Untersuchungen vielfach unterstützt hat, hiermit meinen verbindlichen Dank auszusprechen. In gleicher Weise bin ich dem kürzlich verstorbenen Hrn. Privatdozenten Dr. Hemmeter zu Dank verpflichtet, da er mir bei der Diskussion des Streubegriffes mit seinem Rate zur Seite stand und mich insbesondere auf das Problem der Streuinduktivität bei Zylinderwicklung aufmerksam machte.

Lebenslauf

Ich bin am 28. Februar 1902 zu Breslau geboren und besuchte daselbst von Ostern 1908 bis Ostern 1920 das Staatliche König-Wilhelm-Gymnasium, welches ich mit dem Reifezeugnis verließ. Von Ostern 1920 bis Herbst 1927 studierte ich an der Technischen Hochschule zu Breslau die Fächer der Elektrotechnik, in welchen ich im Herbst 1922 das Vorexamen und Ostern 1925 das Diplomexamen ablegte. Außerdem war ich von Herbst 1924 bis Herbst 1927 als außerplanmäßiger Assistent am Lehrstuhl für Mathematik (Prof. Dr. phil. Noether und Prof. Dr. phil. Schmeidler) beschäftigt. Dort begann ich im Sommer 1925 mit der vorstehenden Dissertation. Seit Herbst 1927 bin ich im Hochspannungslaboratorium der AEG Transformatorenfabrik tätig.

VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. — Druck von A. W. Schade, Berlin N 65.